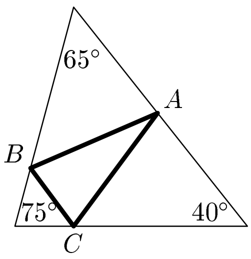
Matboj, 5. 12. 2003

Zadania

1.1. Nájdite najmenšie kladné celé číslo také, že jeho druhá mocnina sa rovná jeden a pol násobku tretej mocniny nejakého prirodzeného čísla.

1.2. Ktoré z týchto čísel je najmenšie?
$\sqrt[30]{30}$, $\sqrt[6]{2}$, $\sqrt[10]{3}$, $\sqrt[12]{4}$ alebo $\sqrt[15]{5}$.

1.3. Osi priľahlých uhlov (viď obr.) trojuholníka ABC vytvárajú nový trojuholník, ktorého vnútorné uhly majú veľkosť $40°$, $65°$ a $75°$. Aké sú vnútorné uhly trojuholníka ABC?

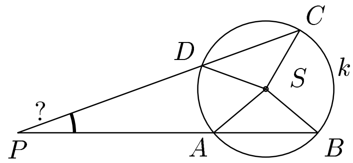


1.4. Je možné, aby žiadna nedeľa v roku (normálnom alebo priestupnom) nepripadala na siedmy deň niektorého z mesiacov toho roka?

1.5. V rovnobežníku $ABCD$ označme M stred strany BC a N priesečník priamok AM a BD. Ďalej označme P priesečník priamok AD a CN. Zistite veľkosť pomeru úsečiek $|DP| : |BM|$.

1.6. Tomáš behá 4-krát rýchlejšie ako Feri kráča. Feri skončil písomku o 14 : 00 a ide pešo domov. Tomáš skončil písomku o 14 : 12 a bežal za Ferim. O koľkej dobehne Tomáš Feriho?

1.7. Majme kružnicu k so stredom S. Na kružnici k sú v poradí body A, B, C, D tak, že $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle BSC| = |\sphericalangle CSD| = 100°$. Priamky AB a CD sa pretínajú v bode P. Zistite veľkosť uhla DPA.

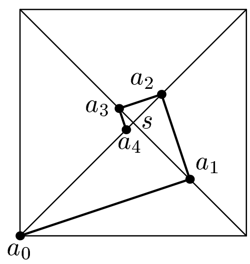


1.8. Nájdite najväčšie kladné celé číslo n také, že $a^7 - a$ je deliteľné číslom n pre ľubovoľné prirodzené číslo a.

1.9. Koľko existuje kladných celých čísel n, pre ktoré platí rovnosť

$$(n^2 - 2n)^{n^2+47} = (n^2 - 2n)^{16n-16} \ ?$$

1.10. Majme štvorec so stredom s a uhlopriečkou dĺžky 2. Skonštruujme postupnosť bodov $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takto: a_0 je vrchol štvorca a každý ďalší bod a_i leží na uhlopriečke podľa obrázka, pričom sa vzdialenosť $|sa_i|$ z kroka na krok zmenšuje o polovicu, t.j. $|sa_i| = \frac{1}{2}|sa_{i-1}|$. Vypočítajte celkovú dĺžku špirály $a_0 a_1 a_2 \ldots$



2.1. Koľko z týchto piatich rovníc má v kladných celých číslach aspoň jedno riešenie?

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} &= \sqrt{x} \\
\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} &= \sqrt{x} + \sqrt{x} \\
\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} &= \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} \\
\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} &= \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} \\
\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} &= \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x}
\end{aligned}$$

2.2. V trojuholníku ABC je uhol pri vrchole C trikrát väčší ako uhol pri vrchole A a uhol pri vrchole B je dvojnásobkom uhla pri vrchole A. Aký je pomer dĺžok strán $|AB| : |BC|$?

2.3. Robo je občas v poriadnom strese. Postrehol, že ak sa vyvezie eskalátorom (stojac na ňom), trvá mu to minútu a pol. Včera, keď bol eskalátor nefunkčný, dokázal po ňom vybehnúť presne za minútu. Dnes sa veľmi ponáhľa, preto sa rozhodol, že po ňom vybehne, aj keď funguje a ide správnym smerom. Ako dlho mu to bude trvať?

2.4. Nájdite všetky kladné celé čísla n vyhovujúce nerovnosti $n^3 - n < 1 \cdot 2 \cdots n$.

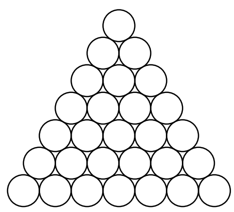
2.5. Dĺžky dvoch rovnobežných strán lichobežníka sú 10 cm a 20 cm. Dĺžky ostatných dvoch strán (ramien) sú $\sqrt{89}$ cm. Nájdite dĺžky uhlopriečok.

2.6. Koľko je takých kladných celých čísel, že v dvojkovom zápise obsahujú iba číslice 1 a zároveň ony samé sú druhou mocninou nejakého celého čísla?

2.7. Koľko rôznych reálnych riešení má rovnica

$$4 - x^2 = \frac{1}{x^3}\ ?$$

2.8. Trojuholníkové čísla sú čísla tvaru $\frac{n(n+1)}{2}$, kde $n = 1, 2, 3 \ldots$.
Koľko z prvých sto trojuholníkových čísel končí číslicou nula?



2.9. Zistite výšku kopy pozostávajúcej z 28-ich rúr (ako na obrázku) ak viete, že priemer každej rúry je 10 cm.

2.10. Určte všetky kladné celé čísla n, ktoré sa nedajú napísať v tvare $n = 3x + 5y$, kde x a y sú kladné celé čísla.

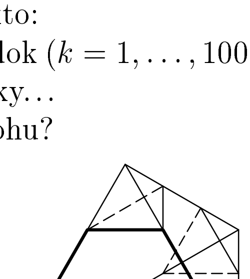
3.1. S presnosťou na sekundy vypočítajte veľkosť vnútorného uhla pravidelného sedemuholníka.

3.2. Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel x, y, pre ktoré platí: $|x - 2| + |y - 3| = 3 - y$.

3.3. Matematik De Morgan žil počas 19. storočia. V posledný rok svojho života prehlásil, že mal x rokov v roku x^2. V ktorom roku sa narodil?

3.4. Nájdite všetky reálne čísla p také, že rovnica $\sqrt{x - p} = x$, s neznámou x má práve dve rôzne reálne riešenia.

3.5. Nika si nakreslila tabuľku 100×100 a do každého políčka vpísala číslo takto:
Do k-teho riadku vpísala čísla $1, 1{+}k, 1{+}2k, \ldots, 1{+}99k$, pričom k označovalo riadok ($k = 1, \ldots, 100$).
Napr. v pravom dolnom rohu je číslo 9901, prvý stĺpec tabuľky sú samé jednotky…
Aké bolo najväčšie číslo na uhlopriečke z ľavého dolného do pravého horného rohu?



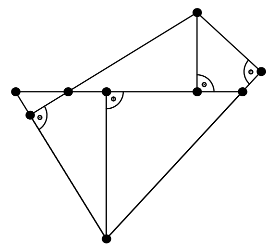
3.6. Z pravidelného štvorstena sme zrezaním všetkých štyroch vrcholov vytvorili osemsten tak, aby sa 4 pôvodné steny štvorstena zmenili na zhodné pravidelné šesťuholníky. Vypočítaj pomer objemu osemstena k objemu pôvodného štvorstena.

3.7. V ostrouhlom trojuholníku je veľkosť najmenšieho uhla 1/5 z veľkosti najväčšieho uhla. Všetky uhly majú (v stupňoch) celočíselnú veľkosť. Aký je súčet veľkostí dvoch najväčších uhlov?

3.8. Študent napísal rovnosť $(44)_b \cdot (55)_b = (3506)_b$, ktorá je pravdivá v číselnej sústave so základom b, $1 < b \leq 34$, kde $(x)_b$ je zápis čísla x v číselnej sústave so základom b. V akej číselnej sústave počítal?

3.9. Nájdite všetky kladné celé čísla x, y pre ktoré platí $xy = 20 - 3x + y$.

3.10. Nakreslime si trojuholník ABC s dĺžkami strán $|AB| = 3$, $|BC| = 4$ a $|CA| = 5$. Nad stranou AB zostrojíme zvonku štvorec ABB_1A_1, nad stranou BC štvorec BCC_2B_2 a nad stranou AC štvorec ACC_3A_3. Vypočítajte obsah šesťuholníka $A_1B_1B_2C_2C_3A_3$.



4.1. Koľko rôznych štvoríc z vyznačených bodov leží na kružnici?

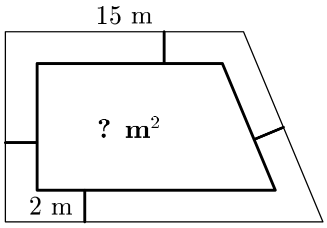
4.2. Je známe, že existuje štvorciferné číslo také, že jeho jednotky sú rovné desiatkam zväčšeným o 1, stovky sú dvojnásobkom desiatok a tisícky nie sú menšie ako jednotky. Toto číslo je rovné dvojnásobku nejakého prvočísla. Nájdite toto štvorciferné číslo!

4.3. Medzi prirodzenými číslami definujeme *silné* čísla nasledovne:

1. Jednociferné číslo je silné práve vtedy, keď je prvočíslo.
2. Aspoň dvojciferné prvočíslo je silným, ak sú silné obe čísla, ktoré dostaneme odobraním raz prvej a raz poslednej cifry pôvodného čísla (napr. 73 je silné, ale ani 57 ani 353 nie sú).

Nájdite všetky silné čísla.

4.4. Ak je číslo 1998 napísané v číselnej sústave pri základe $n > 1$, získame trojciferné číslo s ciferným súčtom 24. Nájdite všetky prípustné hodnoty n.



4.5. Deduško Večerníček si chce ma oplotenom pozemku v tvare pravouhlého lichobežníka s plochou 210 m^2 postaviť chalúpku. Dva rovnobežné ploty majú dĺžku 20 m a 15 m. Podľa európskych noriem musí byť plot od chalúpky vzdialený aspoň dva metre. Aká najväčšia môže byť rozloha Deduškovej chalúpky?

4.6. O 8 : 00 ráno sa vybral cyklista z mesta A do mesta B vzdialeného 50 km vzdialeného od mesta A. Keď prešiel 10 km, predbehlo ho auto, ktoré vyšlo z A o 8 : 25. Vodič auta prišiel do B, tam sa zdržal 75 minút a potom sa vrátil do mesta A. Spiatočná cesta mu trvala o tretinu kratší čas ako cesta tam. Cyklistu stretol 5 km pred mestom B. Koľko bolo presne hodín, keď sa vodič auta vrátil do A?

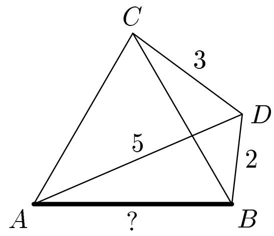
4.7. Nájdite všetky hodnoty parametra m, pre ktoré má rovnica

$$(x^2 - 2xm - 4(m^2 + 1)) \cdot (x^2 - 4x - 2m(m^2 + 1)) = 0$$

práve tri rôzne reálne riešenia.

4.8. V rovnostrannom trojuholníku ABC sú na stranách AB a AC postupne dané body M a N tak, že platí $|AN| = |BM| = \frac{1}{3}|AB|$. Označme O priesečník priamok BN a CM. Určte obsah štvoruholníka $AMON$, ak je obsah trojuholníka ABC $7\,\mathrm{cm}^2$.

4.9. V rovine je nakreslený rovnostranný trojuholník ABC a bod D taký, že $|AD| = 5$, $|BD| = 2$ a $|CD| = 3$. Nájdite veľkosť strany trojuholníka ABC.



4.10. Na párty sa stretlo 120 ľudí, niektorí sa navzájom poznajú iní nie. Poznanie sa je symetrické. Štvoricu ľudí A, B, C, D nazveme *kentovou*, ak sa poznajú iba A s B, C s D a nikto viac (teda A ani B nepoznajú ani C ani D, podobne pre C a D). Zistite maximálny možný počet kentových štvoríc na párty.

Riešenia

1.1 $18^2 = 324 = 1,5 \cdot 6 * 6 * 6$
1.2 $\sqrt[15]{5}$
1.3 $30°$, $50°$ a $100°$
1.4 nie
1.5 $4 : 1$
1.6 $14 : 16$
1.7 $20°$
1.8 42
1.9 štyri $(n = 1, 2, 7, 9)$
1.10 $\sqrt{5}$

2.1 tri
2.2 $2 : 1$
2.3 36 sekúnd
2.4 $n = 1$ a $n \geq 6$
2.5 17 cm
2.6 existuje jediné a to jednotka
2.7 3
2.8 20
2.9 $10(3\sqrt{3} + 1) \doteq 61,96$
2.10 $n = 1, \ldots, 7$

3.1 $128°34'17''$
3.2 $(2,1), (2,2), (2,3)$
3.3 1806
3.4 $p \in \langle 0, \frac{1}{4})$
3.5 2501
3.6 $23 : 27$
3.7 $163°$ (uhly sú $17°$, $78°$, $85°$)
3.8 7
3.9 $[2, 14]$
3.10 74

4.1 štyri
4.2 9634
4.3 2, 3, 5, 7, 23, 37, 53, 73, 373
4.4 $n = 15$ $((1998)_{10} = (8\ 13\ 9)_{15})$
4.5 $\frac{320}{3} = 106,6$
4.6 $11 : 45$
4.7 $m = 3$ (korene sú $10, -4, 10, -6$)
4.8 2 cm^2
4.9 $\sqrt{19}$
4.10 $15 \cdot 23 \cdot 24^3$