Košický matboj, 25. 4. 2003, 1. časť

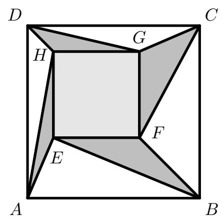
1.1. Kuiso býva na Dlhej ulici. Tým, ktorí by chceli vedieť číslo jeho domu prezradil, že číslo jeho domu nie je párne, je deliteľné aspoň troma prvočíslami a ulica na ktorej býva má najviac 160 čísel. Aké je číslo jeho domu?

1.2. Dláždič si objednával štvorcové dlaždice $1 \times 1\,\mathrm{dm}$ na pokrytie štvorcovej podlahy. Namiesto dĺžky strany podlahy v decimetroch však na objednávku napísal svoj vek. Tak sa stalo, že mu poslali o 1111 dlaždíc viac než potreboval. Koľko mal dláždič rokov?

1.3. Koľko je takých dvojíc čísel $a, b \in \mathbb{N}$, $(a \leq b)$, že platí: $\sqrt{a} + \sqrt{b} < \pi$.

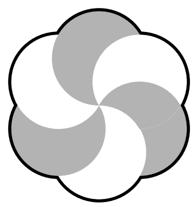
1.4. Štvorec $EFGH$ sa nachádza vnútri štvorca $ABCD$. Dĺžka strany $|AB| = 10\,\mathrm{cm}$. Aký obsah musí mať štvorec $EFGH$ aby súčet obsahov trojuholníkov AEH,DHG,CGF,BFE bol rovný obsahu štvorca $EFGH$?

1.5. Kráľ mal 3 dcéry: Anežku, Bertu a Cecíliu. Anežka vždy hovorila pravdu, Berta vždy klamala a Cecília niekedy vravela pravdu a inokedy klamala. Prišiel cudzí princ a chcel sa uchádzať o princeznú Anežku. Kráľ ho zaviedol do komnaty, kde sedeli všetky tri jeho dcéry a povedal mu, že sa mu dá Anežku len, ak uhádne, ktorá z nich to je. Smie sa však každej z jeho dcér opýtať len jednu otázku. Princ položil všetkým trom otázku: *Ako sa volá princezná uprostred?* Princezná sediaca vľavo povedala Anežka, tá v strede sediaca, že je to Berta a tá vpravo sediaca povedala, že v strede sedí Cecília. Kde sedela Anežka?



1.6. Peťo si chcel urobiť výlet do okolia Prešova na bicykli. Našiel trasu dlhú 30 km. Keby vedel ísť v priemere o 5 km/h rýchlejšie, zvládol by túto trasu o 18 minút skôr. Aká bola jeho priemerná rýchlosť počas výletu na bicykli?

1.7. Vypočítajte obsah vyšrafovanej časti, ak polomer každej zo šiestich kružníc na obrázku je 1 cm.



1.8. Keď sa Robo na prednáške nudí, nakreslí si pravidelný 33-uholník $A_1A_2 \cdots A_{33}$ a počíta, koľko existuje úsečiek spájajúcich jeho vrcholy, ktoré majú aspoň jeden spoločný bod s trojuholníkom $A_{11}A_{22}A_{33}$. Nanajvýš koľko takýchto úsečiek sa mu podarí nájsť?

1.9. Koľkými spôsobmi môžu stáť na prázdnej šachovnici dvaja králi rôznej farby tak, aby sa neohrozovali?

1.10. Určte najmenšie prirodzené číslo n také, že ak vyberieme ľubovoľných n rôznych čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 30\}$, potom bude táto n–tica obsahovať aspoň dve súdeliteľné čísla.

1.11. Nájdite tri rôzne nepárne čísla od 1 do 20, pre ktoré platí: Súčet prvých dvoch je o 1 väčší ako tretie číslo a pritom ak pripočítame k prvému z nich dvojnásobok druhého a trojnásobok tretieho, dostaneme číslo 70. Ktoré sú to čísla?

1.12. V trojuholníku ABC zvolíme na strane AB bod U a na strane BC bod V tak, aby platilo $|AU| : |UB| = 5 : 7$ a $|BV| : |VC| = 2 : 1$. Navyše viete, že obsah trojuholníka ABC je $S_{\triangle ABC} = 144\mathrm{cm}^2$ a $|\sphericalangle ABC| = 72°$. Vypočítajte obsah trojuholníka UVB.

Košický matboj, 25. 4. 2003, 2. časť

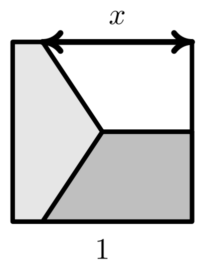
2.1. Scooby mal vypočítať aritmetický priemer čísel a, b, c, d (t.j. $(a + b + c + d)/4$). Počítal takto: najprv vypočítal $p = (a+b)/2$, potom $q = (c+p)/2$ a nakoniec $r = (q+d)/2$. Napriek tomu dostal správny výsledok. Čomu sa rovná aritmetický priemer čísel a a b (vyjadrite za pomoci c a d)?

2.2. Koľko členov má nový klub abstinentov, ak na registráciu boli použité všetky trojciferné čísla, ktoré neobsahujú žiadnu z cifier 1, 8?

2.3. Koľkokrát za 24 hodín zoviera minútová ručička s hodinovou pravý uhol?

2.4. Nájdite všetky prvočísla p také, že aj výraz $613 - p$ je prvočíslo.

2.5. Štvorec so stranou dĺžky 1 je rozdelený troma čiarami z jeho stredu na dva rovnaké lichobežníky a jeden päťuholník rovnakého obsahu (viď obr.). Nájdite veľkosť x dlhšej základne lichobežníka.



2.6. Zberateľ mal 10 vzácnych mincí, každú inej hmotnosti. K dispozícii má dvojramenné váhy, ktoré mu ukážu iba to, ktorá miska je ťažšia. Koľko koľko vážení potrebuje na to, aby s istotou zistil najťažšiu mincu?

2.7. Na rovnej ceste s mestami $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ (po poradí) sa nachádza poklad. Viete, že vzdialenosť medzi mestami $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ je 6 km, medzi $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ je 8 km. Vzdialenosť medzi mestami $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ si už zabudol. Našiel si ale starú mapu, v ktorej sa písalo:
… z mesta $\mathcal{A}$ choď polovicu cesty do mesta $\mathcal{C}$. Potom pokračuj tretinu cesty do mesta $\mathcal{D}$. Obráť sa späť smerom k mestu $\mathcal{A}$ a poklad sa nachádza presne v štvrtine cesty do mesta $\mathcal{B}$. Navyše, poklad sa nachádza presne v polovici medzi mestami $\mathcal{A}$ a $\mathcal{D}$ …
Zistite z tohto, aká je vzdialenosť, ktorú ste zabudli.

2.8. Mravec M sa chce dostať z jedného rohu hranola $2 \times 3 \times 5$ cm do protiľahlého (po telesovej uhlopriečke) rohu. Putovať môže iba po povrchu hranola. Aká je dĺžka najkratšej možnej cesty?

2.9. Riki má nový zlepšovák proti nude. Chce si zlepšiť technické kreslenie, a tak si kreslí rôzne kvádre, ktorých každá hrana má celočíselnú veľkosť z intervalu $\langle 1, 20\rangle$. Na jednu stranu sa mu zmestí najviac 10 takýchto kvádrov. Vystačí mu 60–listový zošit?

2.10. Zistite, či sa medzi číslami 10001, 100001, 1000001, … (prvá a posledná číslica je 1 ostatné sú 0) nachádzajú násobky čísla 1001. Ak také čísla existujú, nájdite najmenšie z nich.

2.11. Aké je riešenie rovnice s celou časťou v obore reálnych čísel ($\lfloor s \rfloor$ je najmenšie celé číslo neprevyšujúce reálne číslo s, t.j. $s - 1 < \lfloor s \rfloor \leq s$)

$$\left\lfloor \frac{5x+6}{8} \right\rfloor = \frac{15x-7}{5}?$$

2.12. Tomáš sa už niekoľko dní snaží vybrať si z množiny $\{1, 2, \ldots, 15\}$ čo najviac čísel tak, aby súčin žiadnych troch rôznych z nich nebol druhou mocninou celého čísla. Poraďte mu, najviac koľko si ich môže vybrať.

Košický matboj, 25. 4. 2003, 3. časť

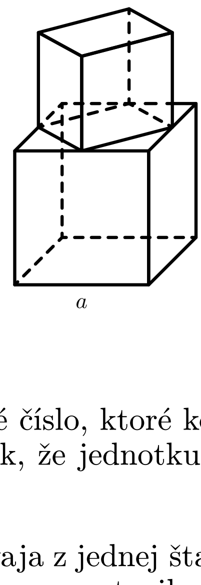
3.1. Na prednášku prišlo nie menej ako 70, ale nie viac ako 90 študentov a študentiek. Počet všetkých lavíc, v ktorých sedeli, prevyšoval o jednu počet študentov sediacich v jednej lavici. V každej lavici sedela práve jedna študentka. Súčet počtu lavíc a všetkých študentov dal počet všetkých prítomných. V koľkých laviciach sedeli?

3.2. Kuiso začal zbierať knihy z rôznych starších programovacích jazykov. Na poličke má 8 kníh PASCAL, 17 kníh FORTRAN, 6 kníh APL, 12 kníh COBOL a 20 kníh BASIC. Všetky knihy sú obalené v rovnakom obale. Koľko kníh si musí vziať, aby mal istotu, že medzi nimi bude 10 kníh s rovnakým programovacím jazykom?

3.3. Študenti jednej triedy sa zozbierali na kyticu kvetov pre triednu učiteľku. Spolu nazbierali 529 korún, pričom každý žiak prispel rovnakou sumou peňazí, ktorá bola rovnaká ako počet žiakov v triede. Všetky peniaze boli vyzbierané iba v minciach 1 Sk 5 Sk a 10 Sk, pričom každý žiak mal presne a prispel práve piatimi mincami. Zistite, koľko desaťkorunáčok vyzbierali študenti.

3.4. Štyria priatelia Eduard, František, Hubert a Juraj išli so svojimi manželkami na novoročný ples. Na začiatku každý z nich tancoval so svojou ženou, ale potom sa pomiešali. Blažena tancovala s Eduardom, Alica s mužom Karolíny, Dora s manželom Alice, František s Jurajovou ženou a Juraj s Eduardovou. Kto je manželom Blaženy?

3.5. Na kocke o hrane a je postavená druhá menšia kocka, a to tak že vrcholy podstavy menšej kocky sú stredmi strán tej väčšej. (viď obr.) Určte povrch vzniknutého telesa.



3.6. Je daný kváder $ABCDEFGH$, pre ktorého rozmery platí $|AB| : |AD| : |AE| = 4 : 3 : 8$. Kváder rozrežeme rovinou, ktorá prechádza hranami AE a CG. Plocha rezu je $1440\,\mathrm{cm}^2$. Určte objem kvádra.

3.7. Na začiatok 5-ciferného čísla A napíšem jednotku. Dostanem 6-ciferné číslo, ktoré keď vynásobím trojkou, dostanem 6-ciferné číslo, ktoré môžem zostaviť z čísla A tak, že jednotku dám na jeho koniec. Aké je to číslo A?

3.8. Jano a Rišo sa pretekali na trati dlhej h metrov. Prvýkrát behali obidvaja z jednej štartovacej čiary. V cieli bol prvý Jano s náskokom d metrov. V druhom behu sa Jano postavil d metrov za štartovaciu čiaru, odkiaľ začínal bežať Rišo. Aký bol jeho náskok prvého v cieli pred druhým? (vyjadrite za pomoci d a h)

3.9. Na odvesne BC pravouhlého trojuholníka ABC s pravým uhlom pri vrchole B zvolíme bod D tak, aby platilo $|\sphericalangle BAD| = 2|\sphericalangle DAC|$. Viete, že platí $|AB| : |AD| = 2 : 3$. Vyjadrite pomer $|BD| : |CD|$ ako zlomok dvoch nesúdeliteľných prirodzených čísel.

3.10. Mišo si počas prestávky hádzal naraz štyroma klasickými šesťstennými kockami. Pri jednom hode so všimol, že súčin čísel, ktoré hodil bol 144. Počas hodiny matematiky to povedal Milanovi, ale chytrý Milan hneď zistil, že z toho ešte nevie, aké čísla boli na kockách. Mišo mu chcel pomôcť a tak mu poradil, že súčet čísel, ktoré hodil na kockách bol 14, 15, 16, 17 alebo 18. Viete poradiť Milanovi, ktorý z týchto súčtov mohol vylúčiť?

3.11. Napíšme si postupnosť čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{2003}, \ldots$, pre ktorú platí $a_1 = 1$, $a_{2003} = 2003$ a pre $n \geq 3$ je a_n aritmetickým priemerom predchádzajúcich $(n-1)$ čísel (t.j. $a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})/(n-1)$). Zistite, akú hodnotu má a_2.

3.12. Koľkorát je väčšia prepona pravouhlého trojuholníka od výšky patriacej tejto prepone, ak jeden uhol pravouhlého trojuholníka je $15°$?

Košický matboj, 25. 4. 2003, riešenia 1. časti

Za správnu odpoveď sú 2 body, za nesprávnu -1 bod, za neodpovedanie 0 bodov.

Číslo družstva . . . . **Názov družstva** . . . . **Škola** . . . .

1.1. . . . .

1.2. . . . .

1.3. . . . .

1.4. . . . .

1.5. . . . .

1.6. . . . .

1.7. . . . .

1.8. . . . .

1.9. . . . .

1.10. . . . .

1.11. . . . .

1.12. . . . .

Počet bodov: . . . .

Opravoval: . . . .

Kontroloval: . . . .

Košický matboj, 25. 4. 2003, riešenia 2. časti

Za správnu odpoveď sú 2 body, za nesprávnu −1 bod, za neodpovedanie 0 bodov.

Číslo družstva. . . . . **Názov družstva**. . . . . **Škola**. . . . .

2.1. . . . .

2.2. . . . .

2.3. . . . .

2.4. . . . .

2.5. . . . .

2.6. . . . .

2.7. . . . .

2.8. . . . .

2.9. . . . .

2.10. . . . .

2.11. . . . .

2.12. . . . .

Počet bodov:. . . . .

Opravoval:. . . . .

Kontroloval:. . . . .

Košický matboj, 25. 4. 2003, riešenia 3. časti

Za správnu odpoveď sú 2 body, za nesprávnu −1 bod, za neodpovedanie 0 bodov.

Číslo družstva. . . . . **Názov družstva**. . . . . **Škola**. . . . .

3.1. . . . .

3.2. . . . .

3.3. . . . .

3.4. . . . .

3.5. . . . .

3.6. . . . .

3.7. . . . .

3.8. . . . .

3.9. . . . .

3.10. . . . .

3.11. . . . .

3.12. . . . .

Počet bodov:. . . . .

Opravoval:. . . . .

Kontroloval:. . . . .

Riešenia

1.1. 105

1.2. 56

1.3. 5

1.4. $400/9$

1.5. Anežka sedela napravo

1.6. $20\,\mathrm{km/h}$

1.7. $\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

1.8. 393

1.9. $4.(64-4) + 6.4(64-6) + 49.(64-9) =$

1.10. 12

1.11. $(7, 9.15)$

1.12. 56

2.1. $(a+b)/2 = d$

2.2. $7 * 8 * 8 = 448$

2.3. 44

2.4. žiadne

2.5. $\frac{5}{6}$

2.6. 9

2.7. $6\,\mathrm{km}$

2.8. $\sqrt{50}$

2.9. nie, potrebuje 1540 obrazkov

2.10. $10^9 + 1$

2.11. $\frac{4}{5}$

2.12. najviac 10 a to napr. $(1, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14)$

3.1. 9 lavíc

3.2. 42

3.3. 46

3.4. Hubert

3.5. $8a^2$

3.6. 20736

3.7. 42857

3.8. $\frac{d^2}{h}$

3.9. $\frac{5}{9}$

3.10. 18

3.11. 4005

3.12. 4