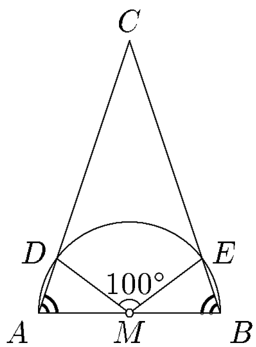
Košický matboj, letné kolo 2002, 1. časť

1.1. Koľko najviac priesečníkov môže vzniknúť, ak na papier nakreslíme kružnicu a trojuholník?

1.2. Majme dve množiny $A = \{a, b, c\}$ a $C = \{a, b, d, e\}$. Koľko existuje podmnožín B abecedy takých, že platí súčasne $B \subset C$ aj to, že množina $A \cap B$ obsahuje práve dva prvky?

1.3. Jožko si chcel zapamätať, aké dostane vreckové. Bolo to trojciferné číslo a zapamätal si iba dve číslice tohto čísla, vedel ich v správnom poradí. Vedel aj, že tretia cifra toho čísla je štvorka. Nevedel ale, či sa nachádza na prvom alebo na poslednom mieste. Otecko mu ale poradil, že obe možné čísla, ktoré mu vychádzali sa v absolútnej hodnote líšili rovnako od čísla 400. Aké boli tie dve „isté“ cifry?



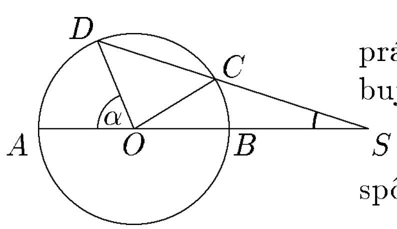
1.4. Do daného rovnoramenného trojuholníka ABC zo základňou AB nakrelime kružnicu o priemere AB. Tá pretne ramená $\triangle ABC$ v dvoch bodoch D a E. Úsečku DE vidno zo stredu základne AB pod uhlom $100°$. Zistite veľkosti uhlov $\triangle ABC$.

1.5. Chceme rozdeliť 10 jabĺčok medzi Janku, Jarku a Jožku aby Janka dostala aspoň 3, Jarka aj Jožka aspoň po dve, Jožka nedostala viac ako 3 jabĺčka. Koľkými spôsobmi tak vieme urobiť?

1.6. Aká je posledná cifra súčtu $1! + 2! + 3! + \cdots + 2002!$? $(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)$

1.7. Ktorý z pravidelných n–uholníkov má najkratšiu uhlopriečku rovnako dlhú ako polomer jemu opísanej kružnice? (strana sa nepočíta medzi uhlopriečky)

1.8. Každý z kúzelníkov má svoje vzácne kamene. Arpád má 15 opálov, Félix má 9 rubínov a Baltazár má 7 diamantov. Každý daroval zvyšným dvom po jednom zo svojich kameňov. Potom mali všetci kúzelníci kamene v hodnote 1 750 000 Sk. Akáje cena jedného diamantu? (kamene jedného druhu sú rovnako drahé)



1.9. Mohli sme pri číslovaní príručky mladých skautov použiť práve 2002 číslic? (na očíslovanie strán od 1 do 11 vrátane potrebujeme 13 číslic)

1.10. Koľko prvočísel vieme zapísať práve dvoma rôznymi spôsobmi ako súčet dvoch iných prvočísel (1 nie je prvočíslo)?

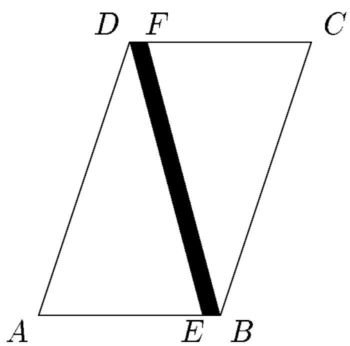
1.11. Na kružnici k so stredom O a priemerom AB zvoľme body C a D tak, aby prienik priamok AB a CD (označíme ho S) ležal na polpriamke $\overrightarrow{AB}$ za bodom B. Body A, B, C a D sú na kružnici označené v protismere hodinových ručičiek. Viete, že veľkosť uhla AOD je rovná α a zároveň $|AB| = 2\,|CS|$. Vyrátajte veľkosť uhla ASC za pomoci α.

1.12. Na aký najväčší počet častí môže k kružníc a p priamok rozdeliť rovinu?

Košický matboj, letné kolo 2002, 2. časť

2.1. Do rovnoramenného $\triangle ABC$ s jedným vnútorným uhlom veľkým $120°$ sme nakreslili všetky výšky, osi uhlov aj ťažnice. Koľko rôznych čiar sme pritom nakreslili?

2.2. O troch otvorených hypotézach sa rozprávali znalci z celého sveta. Zhodli sa na nasledujúcom: Ak platí prvá, potom platia aj zvyšné dve. Ak platí druhá, potom platí ešte aspoň jedna ďalšia. Ak platí tretia, tak platí prvá a neplatí druhá hypotéza.
Ak viete, zistite, ktoré hypotézy sú pravdivé a ktoré nie.

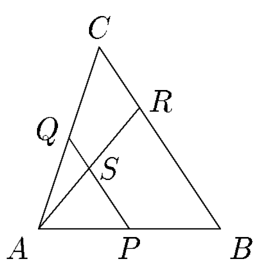


2.3. Šikovný stolár Jožko chcel rozrezať stôl v tvare kosoštvorca na dve polovičky po uhlopriečke. Matematicky by sme túto situáciu zapísali takto: bol to kosoštvorec $ABCD$. Keď začal rezať z bodu D po uhlopriečke, veľmi sa netrafil a tak jeho rez skončil v bode E na úsečke AB tak, že bod B minul o desatinu dĺžky strany AB (t.j. $10\,|EB| = |AB|$). Tak to musel potom zarovnať tak, aby boli výsledné trojuholníčky rovnaké (jeden z nich bol AED). Koľko percent odpadu si tak vytvoril?

2.4. Koľko prvočísel menších ako 10000 má ciferný súčet menší ako 4 (1 nie je prvočíslo)?

2.5. Ktoré prirodzené čísla menšie ako 365 delia aspoň štyri rôzne prvočísla?

2.6. V uzavretej fľaši, ktorá má tvar kužeľa s výškou 10 cm a jej podstava má priemer 20 cm máme záhadnú tekutinu. Ak postavíme fľašu na stôl „špicou" nahor, bude tekutina siahať do výšky h cm, to si poznačíme na okraj fľaše. Ak teraz fľašu prevrátime hore podstavou, tekutina bude siahať práve do výšky, kde sme si urobili značku. Aký bude objem kocky o strane h?



2.7. V trojuholníku ABC označme stredy AB a AC ako P a Q. Bod R na strane BC je taký, aby platilo $|BR| = 2\,|RC|$. Priamky AR a PQ sa pretínajú v bode S. Viete, že obsah trojuholníka AQS je $1\,m^2$, aký je obsah štvoruholníka $BRSP$? (v metroch štvorcových)

2.8. Do Jožkovej kancelárie sa robí konkurz na sekretárku. Prišlo 18 záujemkýň. Iba jedna horovila nemecky, francúzky aj anglicky. Tri z nich hovorili anglicky aj francúzky, 13 záujemkýň ovládalo nemečinu, z ktorých 5 vedeli komunikovať aj v anglickom jazyku. Deväť slečien ovládalo francúžtinu. Ani jedna zo záujemkýň nehovorila iba po anglicky. Koľko slečien hovorí iba po francúzky?

2.9. Ak $xy = 24$, $xz = 48$, $yz = 72$, čomu sa rovná hodnota výrazu $x + y + z$?

2.10.

$$\begin{array}{c} 0 \\ -1\ 0\ 1 \\ -2\ -1\ 0\ 1\ 2 \end{array}$$

Keď budeme čítať čísla po riadkoch takejto nekonečnej pyramídy zľava doprava a zhora nadol, ktoré číslo prečítame ako dvetisícdruhé? (čítame $0, -1, 0, 1, -2, -1, \ldots$)

2.11. Osemmiestne prirodzené číslo je deliteľné prvočíslami 73 aj 137. Jeho druhá cifra zľava je 7. Aká je jeho tretia cifra sprava?

2.12. Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré sa iba o jednotku (v absolútnej hodnote) líšia od súčtu druhých mocnín všetkých svojich cifier.

Košický matboj, letné kolo 2002, 3. časť

3.1. Ak platí $\dfrac{a+p}{b-p}=\dfrac{4a}{3b}$, čomu sa potom rovná p za pomoci a a b?

3.2. Ak „predĺžime" steny kocky na roviny, tieto roviny nám rozdelia priestor, v ktorom leží kocka na niekoľko častí. Na koľko presne?

3.3. Do kružnice s polomerom 1 nakreslíme pravidelný šesťuholník. Aká je dĺžka jeho uhlopriečky (nie strany), ktorá neprechádza stredom jednotkovej kružnice?

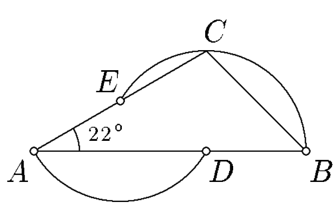
3.4. Jožko a Jožka Jožkoví chcú mať 4 nádherné deti, medzi nimi aspoň dvoch chlapcov a najmladšie bábo chceli mať dievčatko. Najstarší sa im narodil chlapček (ako sa asi volá?). Akú majú šancu, že sa im želanie splní, keď chlapci aj dievčatá sa rodia s rovnakou „pravdepodobnosťou"?

3.5. Koľko existuje čísel $n \in \mathbb{N}$, že $1 \leqq n \leqq 2002$ a $\sqrt[2]{2002n}$ je prirodzené číslo?

3.6. Starček rozdeľoval svojim trom synom svoje jednodolárové mince. Najstaršiemu dal polovicu mincí (bolo to celé číslo) a pridal ešte jednu pre šťastie. Prostrednému dal tretinu mincí (tiež celé) z tých, čo zvýšilo a tiež mu pridal ešte jednu. Najmladší dostal aspoň 10 mincí. Koľko najmenej mincí mal starček?

3.7. Janka, Jarka a Jožka boli na zmrzline v stánku, kde predávali iba jahodovú, malinovú a čerešňovú. Každá z nich si kúpila jednu obľúbenú, každá inú (každá obľubuje iba jediný druh). Viete aj to, že: Ak si kúpila Janka jahodovú, tak Jarka mala malinovú. Ak si kúpila Janka čerešňovú, tak Jožka mala malinovú. Ak Jarka neobľubuje čerešňovú zmrzlinu, tak Jožka si isto kúpila jahodovú.
Aké zmrzliny mali jednotlivé dievčatá?

3.8. Rodinka Jožkových si chce postaviť letné sídlo. Ich sídlo sa bude nachádzať v okrúhlom parčíku, ktorý má v priemere $2R$ metrov. Sídlo bude pozostávať zo štyroch okrúhlych altánkov: troch rovnako malých (pre syna, dcéru a hostí) a jedného, čo do obsahu štyrikrát väčšieho, pre rodičov. Jožkovci majú radi pohyb na čerstvom vzduchu, tak chcú, aby voľná plocha v parku (mimo altánkov) zaberala 3/7 celej plochy parku. (lebo sa chcú vyšantiť 3 dni v týždni). Aký bude polomer altánku pre syna?



3.9. Na strane AB trojuholníka ABC zvolíme bod D, zostrojíme kružnicu $k(D, |BD|)$, ktorá navyše prechádza bodom C. Táto kružnica nám pretne stranu AC v bode E, ktorý má tú vlastnosť, že kružnica $l(E, |EA|)$ prechádza bodom D. Ak viete, že veľkosť uhla BAC je $22°$, vyrátajte veľkosť uhla ABC.

3.10. Nájdite všetky riešenia rovnice $1+4x+6y=xy$.

3.11. Máme nejaké kladné reálne číslo. Ak posunieme jeho desatinnú čiarku o 4 miesta doľava, dostaneme také číslo, ktoré je štyrikrát väčšie ako prevrátená hodnota pôvodného čísla. Aké to bolo číslo?

3.12. Koľko existuje takých n-ciferných čísel pozostávajúcich iba z číslic 1, 2, 3 a 4 takých, že cifra 3 sa nenachádza napravo od čísla 4? (napr. pre $n=5$ vyhovujú 12342 aj 13344, ale nevyhovuje 12243)

Riešenia

1.1. 6

1.2. 4

1.3. 3 a 6

1.4. 40, 70, 70

1.5. 7

1.6. 3

1.7. 12-uholnik

1.8. 50000

1.9. nie

1.10. ziadne

1.11. $\frac{\alpha}{3}$

1.12. $k^2 - k + 1 + 2kp + \frac{1}{2} \cdot p(p+1)$

2.1. 7

2.2. vsetky nepravda

2.3. 10

2.4. 4

2.5. 2

2.6. 1 liter

2.7. 6

2.8. 3

2.9. 22

2.10. 21

2.11. 7

2.12. 35, 75

3.1. $\frac{ab}{4a+3b}$

3.2. 27

3.3. $\sqrt{3}$

3.4. $\frac{3}{8}$

3.5. jedine, a to 2002

3.6. 38

3.7. Janka – malina, Jarka – ceresna, Jozka – jahoda

3.8. $\frac{2}{7}R$

3.9. $57°$

3.10. $[31,5]; [5,-21]; [7,29]; [-19,3]; [1,-1]; [11,9]$

3.11. 200

3.12. $(n+3)3^{n-1}$