STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahoj!

Tvojmu pohľadu zjavne neuniklo ďalšie vydanie Stromu, v ktorom nájdeš nielen poradie po prvej sérii tohto semestra, ale aj naše vzorové riešenia. Nezabúdaj však, že sme ešte len v polčase, tak určite nepoľavuj a pusti sa do druhej série. S radosťou očakávame tvoje ďalšie riešenia!

Stromáci

Tábor mladých matematikov

Drahí prváci, ak premýšľate, čo s časom počas ďalších letných prázdnin, máme pre vás dobré správy! Už vieme, kedy a kde sa bude konať TMM, teda Tábor mladých matematikov! V kalendároch si rezervujte 29. júla až 5. augusta 2024, pretože práve vtedy sa ocitneme v Rekreačnom stredisku Zelený breh na najúžasnejšej akcii roka. Pozvánka a prihlasovanie pribudnú na stránku niekedy ku koncu tohto roka po zmene grafikonu ZSSK.

Nevieš, čo je TMM? Tábor mladých matematikov je ako sústredenie, avšak je o 2 dni dlhšie, takže o 2 dni lepšie! Viac informácií (a neskôr aj samotnú pozvánku a prihlasovanie nájdeš na `https://seminar.strom.sk/tmm/`).

1.

Opravovali: **Števo Vašak a Mirka Horváthová**
Počet riešení: 57 Najkrajšie riešenie: **Eva Krajčiová**

Martin si myslí číslo. Mihálovi prezradil, že má práve 4 deliteľov. Potom sa ho Mihál opýtal, aká je jeho posledná cifra. Martin mu odpovedal: „To ti nemôžem povedať, pretože by si už vedel, aké je to číslo.“ Aké číslo si Martin myslí? Nájdite všetky možnosti.

Riešenie

Skúsme sa najprv zamyslieť nad Martinovým výrokom: „To ti nemôžem povedať, pretože by si už vedel, aké je to číslo.“ Z tohto výroku vyplýva, že existuje iba 1 číslo, ktoré má práve 4 deliteľov a končí na túto cifru. Aby sme našli všetky možnosti, musíme pre každú koncovú cifru skontrolovať, či existuje práve jedno číslo so 4 deliteľmi končiace na túto cifru. Ak existuje viac ako jedno, Martinovo číslo sa na danú cifru nebude končiť.

posledná cifra	príklady čísel so 4 deliteľmi
1	21, 51
2	22, 62
3	33, 93
4	14, 34
5	15, 35
6	6, 26
7	27, 57
8	8, 38
9	39, 69

Ostala nám iba cifra 0. Všimnime si, že ak číslo končí na 0, tak je deliteľné 10. V takom prípade je teda deliteľné minimálne 1, sebou samým, 2 a 5. Preto jediným číslom so 4 deliteľmi, ktoré končí na 0, môže byť iba 10. Inak by toto číslo bolo deliteľné minimálne 1, 2, 5, 10 a ešte aj sebou samým, čo už dáva viac ako 4 deliteľov.

Zistili sme teda, že Martinovo číslo môže byť 10 a že na žiadnu inú cifru ako 0 Martinovo číslo nemôže končiť. Preto jediným správnym riešením je 10.

2. Opravovali: **Erik „Rici“ Novák a Ľubo Vargovčík**
Počet riešení: 52 Najkrajšie riešenie: **Natália Poliačiková**

V ostrouhlom trojuholníku ABC má strana AC dĺžku 4. Kružnica opísaná tomuto trojuholníku má priemer 8.

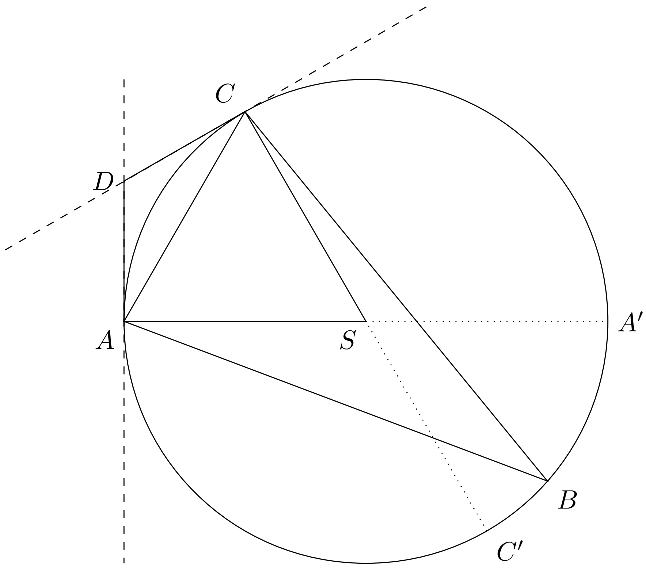
a. Označme D priesečník dotyčníc k opísanej kružnici v bodoch A a C. Aké hodnoty môže nadobúdať veľkosť uhla ADC?

b. Aké hodnoty môže nadobúdať veľkosť uhla ABC?

Riešenie

Načrtnime si situáciu zo zadania, nazývajúc S stred kružnice opísanej ABC. Keďže priemer opísanej kružnice je 8, jej polomer je 4, teda $|AS| = |CS| = 4$. Zo zadania $|AC| = 4$, teda $|AC| = |AS| = |CS| = 4$ a ASC je rovnostranný trojuholník. Z rovnostrannosti ASC vyplýva, že $|\sphericalangle ASC| = 60°$. Dotyčnica ku kružnici je v bode dotyku kolmá na polomer kružnice. Teda $|\sphericalangle SCD| = |\sphericalangle SAD| = 90°$. Súčet veľkostí uhlov v štvoruholníku je 360°. Veľkosť uhla ADC, na ktorú sa pýta podúloha a., môžeme teda vyjadriť ako $360° - |SAD| - |SCD| - |ASC| = 360° - 90° - 90° - 60° = 120°$. Uhol ADC teda nutne nadobúda iba veľkosť 120°.

Vyriešme teraz podúlohu b. Z vety o obvodovom a stredovom uhle je veľkosť stredového uhla nad tetivou AC dvojnásobkom veľkosti obvodového uhla nad touto tetivou. Teda $60° = |\sphericalangle ASC| = 2 \cdot |\sphericalangle ABC|$, tým pádom $|\sphericalangle ABC| = 30°$. Ak by bod B bol na menšom oblúku AC, mohol by uhol $\sphericalangle ABC$ nadobudnúť aj veľkosť 150°. To sa ale stať nemôže, kvôli ostrouhlosti ABC v zadaní. Ostrouhlý trojuholník vždy obsahuje stred svojej opísanej kružnice, teda bod B môže ležať iba na oblúku priemetov bodov A a C cez stred S. Uhol $\sphericalangle ABC$ teda môže nadobúdať iba veľkosť 30°.



3. Opravovala: **Kristín Mišlanová**
Počet riešení: 39 Najkrajšie riešenie: **Michal Iľkovič**

Existuje päť rôznych kladných celých čísel, pre ktoré platí, že súčet ľubovoľnej trojice z nich je deliteľný súčtom zvyšnej dvojice?

Riešenie

Predpokladajme, že takýchto päť rôznych kladných celých čísel existuje a označme ich a, b, c, d, e a bez ujmy na všeobecnosti nech platí $a < b < c < d < e$.

Keďže súčet ľubovoľnej trojice je deliteľný súčtom zvyšnej dvojice, tak musí platiť, že $a+b+c$ je deliteľné $d+e$. To znamená, že existuje kladné celé číslo k také, že $a + b + c = k(d + e)$. Ak by $k \geq 2$, tak dostávame $a + b + c = k(d + e) \geq 2(d + e) > d + d + e > a + b + c$, čo je spor. Posledná nerovnosť plynula z nášho pôvodného predpokladu. To znamená, že nutne platí $k = 1$. Z toho dostávame $a + b + c = d + e$.

Rovnako platí, že $a + b + d$ je deliteľné $c + e$, a teda $a + b + d = l(c + e)$ pre nejaké kladné celé číslo l. Ak by $l \geq 2$, tak analogicky dostávame $a+b+d = l(c+e) \geq 2(c+e) > c+c+e > a+b+d$, čo je spor. Čiže platí $l = 1$, a teda $a+b+d = c+e$.

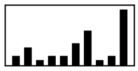
Spojením predpokladu a týchto dvoch rovníc, ktoré sme dostali máme $a + b + d = c + e < d + e = a + b + c$. Z čoho plynie $a + b + d < a + b + c$, čiže $d < c$, čo je ale spor s pôvodným predpokladom. Takže takýchto päť čísel neexistuje.

Komentár

Pri takýchto úlohách je veľmi dôležité skontrolovať, že všetky úpravy rovníc a nerovníc, ktoré využívate, sú korektné. Viacerým z vás sa bohužiaľ stalo, že v niektorom kroku urobili neplatnú úpravu a následne bolo celé riešenie založené na zlom predpoklade, za čo som nemohla udeliť veľa bodov. Rovnako ak ukážete, že úloha neplatí pre konkrétnu päticu čísel a potom len poviete, že nebude platiť ani pre všetky ostatné, lebo sú "horšie", keďže sú v nich čísla viac vzdialené od seba, tak sa nejedná o dôkaz. Museli by ste korektne ukázať, prečo väčšie rozdiely medzi číslami už budú určite znamenať, že to pre danú päticu nebude fungovať.

4.

Opravovali: **Benji Mravec a Paťo Paľovčík**
Počet riešení: 40 Najkrajšie riešenia: **Michal Iľkovič, Bianka Gurská a Martin Šmilňák**



Adam a Bruno hrajú hru. Majú napísaných $n \geq 12$ za sebou idúcich prirodzených čísel. Začína Adam, v ťahoch sa striedajú a v každom ťahu jeden z nich škrtne jedno číslo, až kým neostanú napísané posledné dve čísla. Ak najväčší spoločný deliteľ týchto dvoch čísel je 1, vyhrá Adam, inak vyhrá Bruno.

a. Kto má víťaznú stratégiu, ak n je párne?

b. Kto má víťaznú stratégiu, ak n je nepárne?

Riešenie

a. Spolu je napísaných $n = 2k$ čísel, kde $k \geq 6$. Chlapci na striedačku škrtajú čísla tak, aby na konci ostali 2 nevyškrtnuté, teda každý má $k - 1$ ťahov. Brunovi by stačilo, aby na konci ostali 2 párne čísla. To znamená, že keby on stále škrtal len nepárne čísla, stačilo by mu, aby Adam škrtol tiež aspoň jedno nepárne číslo a na konci by ich bolo vyškrtnutých všetkých k, teda by ostali len 2 párne.

   Adam bude teda donútený škrtať len párne čísla. Bruno teda môže skúsiť dosiahnuť, aby ostali na konci dve súdeliteľné nepárne čísla. Keďže je čísel v rade aspoň 12 a sú za sebou idúce, tak tam budú aspoň 4 násobky trojky. Tie sa striedajú v parite, teda tam budú aspoň 2 nepárne násobky trojky. Bruno teda môže škrtať všetky ostatné nepárne čísla, aby v posledných 4 číslach ostali okrem dvoch párnych čísel dva nepárne násobky 3.

   Následne bude reagovať na Adamov ťah. Ak Adam škrtne nepárne číslo, tak aj Bruno škrtne nepárne a ostanú 2 párne, čiže súdeliteľné čísla. Ak Adam škrtne párne číslo, tak rovnako aj Bruno a ostanú 2 nepárne násobky 3.

   Víťaznú stratégiu má teda Bruno, a to škrtať nepárne čísla okrem dvoch vybraných násobkov trojky, kým Adam škrtá párne čísla. Takto na konci ostanú posledné 4 čísla, kde bude reagovať na Adama. Ak Adam kedykoľvek škrtne jedno z týchto dvoch vybraných čísel, tak Bruno môže naďalej škrtať nepárne čísla a na konci mu ostanú 2 párne čísla.

b. Adam na začiatku môže škrtnúť najmenšie alebo najväčšie číslo z radu a ostane párny počet za sebou idúcich čísel. Keďže Adam chce, aby na konci ostali dve nesúdeliteľné čísla, môže sa pokúsiť, aby to boli dve čísla idúce za sebou.

   Párny počet za sebou idúcich čísel sa dá rozdeliť na disjunktné dvojice za sebou idúcich čísel. Adamovi teda stačí reagovať na Brunove ťahy, teda keď Bruno škrtne jedno číslo z dvojice, tak Adam vyškrtne to druhé. Na konci teda ostane len jedna dvojica za sebou idúcich čísel a Adam zvíťazí.

5. Opravovali: **Mimi Hanus a Vilo Geffert**
Počet riešení: 15 Najkrajšie riešenie: **Samuel Vargovčík**

Sú dané kladné reálne čísla a_1, a_2, ... a_n také, že:

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le n \cdot a_1.$$

Určte, pre ktoré n vieme z každej takejto n-tice vybrať tri čísla $a_i \le a_j \le a_k$, pre ktoré platí:

$$a_i^2 + a_j^2 > a_k^2.$$

Riešenie

Trojicu kladných reálnych čísel (x, y, z), kde $x \le y \le z$ a $x^2+y^2 > z^2$, nazvime ostrouhlý trojuholník. Písmenom F označme Fibonacciho postupnosť, to jest postupnosť celých čísel takú, že $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a pre každé kladné celé i $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$.

Predpokladajme, že existujú n a a_1 až a_n, ktoré spĺňajú prvú sústavu nerovností zo zadania, ale nemajú v n-tici ostrouhlý trojuholník. Dokážme indukciou, že $a_i^2 \ge F_i a_1^2$ pre každý index $i \in \{1, \ldots, n\}$. Indukčná báza: Zjavne $a_1^2 = F_1 a_1^2$ a z usporiadania n-tice $a_2^2 \ge a_1^2 = F_2 a_1^2$. Indukčný krok: Keďže predpokladáme, že (a_{i-2}, a_{i-1}, a_i) nie je ostrouhlý trojuholník, tak

$$a_i^2 \ge a_{i-1}^2 + a_{i-2}^2 \ge F_{i-1}a_1^2 + F_{i-2}a_1^2 = F_i a_1^2.$$

Týmto je dôkaz indukciou hotový. Ďalej zadanie vraví, že $a_n \le na_1$, a teda $n^2 a_1^2 \ge a_n^2 \ge F_n a_1^2$ a odtiaľ $F_n \le n^2$.

Lenže teraz indukciou dokážeme, že $F_n > n^2$ vždy, keď $n > 12$. Indukčná báza: $F_{13} = 233 > 13^2$, $F_{14} = 377 > 14^2$. Indukčný krok:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} > (n-1)^2 + (n-2)^2 = 2n^2 - 6n + 5 = n^2 + (n-1)(n-5),$$

čo je aspoň n^2 za predpokladu, že $n \ge 5$. Dôkaz indukciou je dokončený a dokázané tvrdenie je v spore so záverom predchádzajúceho odseku o n-ticiach bez ostrouhlých trojuholníkov. Čiže pre n väčšie ako 12 taká n-tica neexistuje.

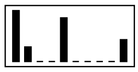
Nech teda $n \le 12$. V n-tici, kde $a_i = \sqrt{F_i}$ pre každé $i \in \{1, \ldots, n\}$, prvá sústava nerovností zo zadania platí. Prvky n-tice sú usporiadané vzostupne, pretože Fibonacciho postupnosť je neklesajúca, a napokon $a_n \le na_1$, lebo $F_n \le n^2$ pre $n \in \{1, \ldots, 12\}$. Avšak v tejto n-tici pre ľubovoľné indexy i, j, k, kde $i < j < k$, z definície Fibonacciho postupnosti $a_i^2 + a_j^2 \le a_{j-1}^2 + a_j^2 = F_{j-1} + F_j = F_{j+1} = a_{j+1}^2 \le a_k^2$, a teda v tejto n-tici nie je ostrouhlý trojuholník. Výsledkom sú preto iba všetky prirodzené čísla väčšie ako 12.

Komentár

Počas opravovania bolo zistené, že v zadaní úlohy sa vyskytla chyba. Namiesto $a_i \le a_j \le a_k$ mala byť uvedená podmienka $i < j < k$. V zadanej úlohe totiž stačí zobrať $i = j = k = 1$, aby sme splnili $a_i^2 + a_j^2 > a_k^2$ pre ľubovoľné n, keďže $2a_1^2 > a_1^2$. V zamýšľanej úlohe $a_i = a_j = a_k$ len pre špeciálny prípad postupnosti.

6. Opravovali: **Lujza Milotová a Michal Masrna**

Počet riešení: 18 Najkrajšie riešenie: **Lucka Chladná**



Majme kváder s nepárnymi celočíselnými rozmermi rozdelený na menšie kvádre s celočíselnými rozmermi. Dokážte, že medzi týmito menšími kvádrami existuje kváder, ktorého vzdialenosti od stien veľkého kvádra:

a. majú párny súčet,

b. sú všetky párne alebo dve párne a štyri nepárne.

Riešenie

a. Veľký kváder má nepárne celočíselné rozmery, teda aj jeho objem bude nepárne číslo. Potom aj súčet objemov všetkých menších kvádrov musí byť nepárne číslo, teda aspoň jeden z kvádrov musí mať nepárny objem. Potom všetky jeho hrany musia mať nepárne dĺžky. Označme si ich k, l, m a dĺžky hrán veľkého kvádra označme a, b, c. Súčet vzdialeností menšieho kvádra od stien veľkého je potom $a-k+b-l+c-m$. Keďže všetky čísla sú nepárne, hodnota tohto výrazu bude párna, čiže medzi menšími kvádrami existuje taký, ktorého vzdialenosti od stien veľkého kvádra majú párny súčet.

b. Ofarbime jednotlivé $1 \times 1 \times 1$ kocky veľkého kvádra šachovnicovo tak, aby jeden z jeho rohov bol čierny. Uvedomme si, že potom všetky jeho rohové kocky budú čierne, pretože má nepárne rozmery. Ďalej si všimnime, že takto ofarbený kváder má o jednu čiernu kocku viac ako bielu.

   Pozrime sa sa teraz na menšie kvádre. Tie s párnym objemom budú obsahovať rovnako veľa čiernych a bielych kociek, tie s nepárnym objemom budú obsahovať o jednu bielu alebo čiernu kocku viac, podľa toho, akej farby budú ich rohy. Keďže veľký kváder obsahuje o jednu čiernu kocku viac, musí existovať aspoň jeden menší kváder so všetkými rohmi čiernymi. Ostáva ukázať, že tento menší kváder bude spĺňať podmienky zo zadania.

   Zaveďme pre malé kocky súradnicový systém, v ktorom kocka v ľavom dolnom prednom rohu veľkého kvádra bude mať súradnice $(1,1,1)$ a v pravom hornom zadnom rohu súradnice (a,b,c). Všimnime si, že v takomto súradnicovom systéme sú čierne kocky práve tie, ktoré majú súčet súradnic nepárny a biele kocky práve tie, ktoré majú súčet súradnic párny. Ďalej označme súradnice kocky v ľavom dolnom prednom rohu menšieho kvádra x, y, z, čo znamená, že súradnice kocky v jeho pravom hornom zadnom rohu sú $x+k, y+l, z+m$. Potom vzdialenosti menšieho kvádra od stien väčšieho sú $x, y, z, a - x - k, b - y - l, c - z - m$. Na to, aby (x,y,z) bola čierna kocka, musí mať párny súčet súradníc, teda musia byť buď všetky jej súradnice párne, potom aj všetky z čísel $x, y, z, a - x - k, b - y - l, c - z - m$ sú párne, alebo je jedno z x, y, z párne a dve nepárne, potom (bez ujmy na všeobecnosti) x a $a-x-k$ sú párne a $y, z, b-y-l$ a $c-z-m$ sú nepárne. Vzdialenosti tohto kvádra od stien väčšieho sú teda buď všetky párne alebo dve párne a štyri nepárne.

Komentár

Všimnite si, že z dôkazu časti b. priamo vyplýva aj platnosť časti a. Úlohu sme sa rozhodli rozdeliť, aby sme časť bodov sprístupnili aj menej skúseným riešiteľom. Sme preto radi, že ste sa nebáli odovzdávať aj riešenia iba prvej časti, za ktorej správne riešenie sme udeľovali 4 body.

Zadania úloh zimného semestra 48. ročníka

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na `seminar.strom.sk`.

2 Druhá séria

Termín odovzdania riešení: **27. novembra 2023**

Ak nevieš pohnúť ďalej s niektorou z úloh, skús sa pozrieť na pár tipov, ktoré nájdeš na našej webovej stránke `seminar.strom.sk/media/uploads/mohlobysahodit.pdf`.

1. Rozhodnite, či existujú navzájom rôzne prvočísla p_1, p_2, … p_n také, že:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1.$$

2. Majme trojuholník ABC so stranou AB dlhou 8 a uhlom oproti tejto strane veľkosti 120 stupňov. Označme p a q dotyčnice ku kružnici opísanej tomuto trojuholníku v bodoch A a B. Majme kružnicu k, ktorá sa dotýka naraz úsečky AB a priamok p a q. Označme D priesečník p a q a E bod dotyku p a k. Aká môže byť vzdialenosť DE? Nájdite všetky možnosti.

3. V rade stojí $a + b$ misiek očíslovaných od 1 po $a + b$, kde a, b sú kladné celé čísla. V prvých a miskách je po jednom citróne a v posledných b miskách je po jednej limetke. V jednom ťahu vieme presunúť citrón z misky i do $i + 1$ a limetku z j do $j - 1$, ak rozdiel $|i - j|$ je párny. V jednej miske môže byť naraz aj viac citrusov. Chceme dostať postupom týchto krokov limetky do prvých b misiek a citróny do posledných a misiek (do každej jeden citrus). Pre aké a, b je to možné?

4. Na chodbe sa rozbil kvetináč. Spýtali sme sa dvoch najbližších tried, kto rozbil kvetináč. Každý žiak obvinil práve jedného žiaka z tej druhej triedy. Dokážte, že vieme dať maslo na hlavu niektorým žiakom tak, že ak sa spýtame všetkých žiakov s maslom na hlave, povedia dokopy práve mená všetkých žiakov bez masla na hlave.

5. Predĺženie ťažnice z A v trojuholníku ABC pretne opísanú kružnicu v D rôznom od A, predĺženie ťažnice z B ju pretne v E rôznom od B. F a G delia strany a a b v tomto poradí v pomere $2 : 1$ tak, že kratšie úseky sú priľahlé k C. Dokážte, že uhly AGE a BFD sú zhodné.

6. Majme celé číslo c a polynóm $P(x)$ stupňa n, ktorého koeficienty sú celé čísla. Označme D najväčšie celé číslo, pre ktoré platí, že D delí $P(i)$ pre každé celé číslo i. Dokážte, že potom D je najväčší spoločný deliteľ čísel $P(c)$, $P(c + 1)$, … $P(c + n)$.

Poradie po 1. sérii zimného semestra 48. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1.	Lucia Chladná	S3	GAMČABA	9	9	9	9	9	9	0	54
2.	Eva Krajčiová	S2	GAlejKE	9	7	9	8	9	9	0	53
3.	Oliver Seman	S2	GAlejKE	9	7	9	9	9	4	0	52
4.	Matúš Pokorný	S2	GAMČABA	9	9	9	5	-	9	0	50
5. - 6.	Martin Šmilňák	S4	GAlejKE	9	9	9	9	9	4	0	49
	Ema Čudaiová	S4	GĽŠTN	9	9	9	9	9	4	0	49
7.	Richard Vodička	S3	GAlejKE	9	7	9	9	9	4	0	47
8.	Marek Horváth	S3	GKonšPO	9	9	9	9	9	-	0	45
9.	Alenka Bálintová	S1	BGMHSuč	9	8	9	9	-	-	0	44
10.	Michal Iľkovič	S3	GSMTŠPO	9	7	9	9	9	-	0	43
11. - 12.	Michal Vodička	S1	GAlejKE	9	7	9	8	-	-	0	42
	Tomáš Saksun	Z9	GAlejKE	9	9	9	6	-	-	0	42
13.	Rudolf Kusý	S2	GAMČABA	9	7	9	9	-	-	0	41
14. - 15.	Matúš Libák	S3	GAlejKE	9	7	2	9	9	4	0	40
	Samuel Vargovčík	S4	ŠpMNDaG	9	8	9	5	9	-	0	40
16.	Tomáš Sukeľ	S2	GAGLSHE	8	8	9	5	-	-	0	35
17.	Veronika Vodičková	S3	GAlejKE	9	7	9	9	-	-	0	34
18.	Matej Karpáč	S1	GAGLS	8	7	4	7	-	-	0	33
19. - 20.	Veronika Jakabová	S2	GAlejKE	9	7	2	5	-	4	0	31
	Michal Ferdinandy	S1	GAlejKE	9	8	-	6	-	-	0	31
21.	Silvia Dallosová	S1	1sg	9	8	1	4	0	0	0	30
22.	Bianka Gurská	S4	GPoštKE	4	7	9	9	-	-	0	29
23.	Alzbeta Klimentova	S4	GPoštKE	7	7	9	5	-	-	0	28
24. - 29.	Eduard Fedorčuk	S4	EGJAKKE	9	9	9	-	-	-	0	27
	Richard Prikler	S1	GJARMPO	9	8	2	0	-	-	0	27
	Martin Dudjak	S2	SMládPP	9	9	-	9	-	-	0	27
	Branislav Ječim	S4	GŠkolSN	9	7	5	6	-	-	0	27
	Martin Vrba	S1	GPoštKE	7	7	-	6	-	-	0	27
	Filip Findorák	S2	Šrobárka	9	9	9	-	-	-	0	27
30.	Janka Urbánová	S1	GAlejKE	7	9	2	1	-	-	0	26
31. - 32.	Martin Mentel	S1	BGMHSuč	9	7	2	-	-	-	0	25
	Karin Sabová	S2	GAlejKE	8	7	2	6	-	-	0	25
33. - 35.	Natália Poliačiková	S3	GPoštKE	9	9	-	6	-	-	0	24
	Ondrej Králik	S3	GAlejKE	9	7	2	6	-	0	0	24
	Juraj Kramár	S3	GAlejKE	9	7	2	6	-	-	0	24
36.	Martina Osuská	S1	GJHN3BA	9	7	-	-	-	-	0	23
37. - 38.	Erik Jochman	S4	GAlejKE	9	7	1	4	-	-	0	21
	Sarah Klopstock	S1	ŠpMNDaG	8	5	1	1	-	1	0	21
39.	Nina Anna Betáková	S2	GAGLSHE	9	7	1	-	-	1	0	19
40.	Peter Kovalický	S2	GAK9KBŠ	4	9	1	2	0	0	0	17
41. - 44.	Katarína Farbulová	S3	GPoštKE	9	7	-	-	-	-	0	16
	Terézia Stanová	S4	EGJAKKE	9	7	-	-	-	-	0	16
	Maxima Anna Alžbeta Bednarčíková	S3	GAlejKE	9	7	-	-	-	-	0	16
	Samuel Šandor	S2	GPoštKE	9	7	-	-	-	-	0	16
45. - 47.	Ondrej Tóth	S1	SPS KNM	8	-	1	3	0	-	0	15
	Kalista Semancová	S3	GAGLSHE	9	1	2	3	-	-	0	15
	Jana Kaťuchová	S2	Šrobárka	2	9	2	1	0	0	0	15
48. - 49.	Oskar Cacara	S2	GPoštKE	7	7	-	-	-	-	0	14
	Adam Fedorjak	S2	Šrobárka	1	9	2	1	0	0	0	14
50.	Lucia Kleščová	S3	GPoštKE	9	1	-	-	-	-	0	10
51. - 54.	Tomáš Lang	S1	SPŠTSNV	0	9	-	-	-	-	0	9
	Nina Hudáková	Z9	GAlejKE	9	-	-	-	-	-	0	9
	Timon MIchael Valanský	S1	GPoštKE	9	-	-	-	-	-	0	9
	Richard Suďa	S1	GVaršZA	9	-	-	-	-	-	0	9
55.	Markéta Dlugošová	S1	GKukuPP	8	0	-	0	-	0	0	8
56. - 57.	Daniel Ryan Takáč	Z9	GAlejKE	7	-	-	-	-	-	0	7
	Matej Bratko	S1	Šrobárka	-	7	-	-	-	-	0	7
58.	Matej Ľachký	S1	BGMHSuč	4	-	-	-	-	0	0	4

Názov: STROM – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 2 • November 2023 • Zimný semester 48. ročníka (2023/2024)
Web: `seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`
Riešenia: Prijímame odovzdaním na webe a v prípade poruchy stránky na adrese `riesenia.strom@strom.sk`.

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Web: `zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `info@strom.sk`

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.