STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahoj!

Tvojmu pohľadu zjavne neuniklo ďalšie vydanie Stromu, v ktorom nájdeš nielen poradie po prvej sérii tohto semestra, ale aj naše vzorové riešenia. Nezabúdaj však, že sme ešte len v polčase, tak určite nepoľavuj a pusti sa do druhej série. S radosťou očakávame tvoje ďalšie riešenia!

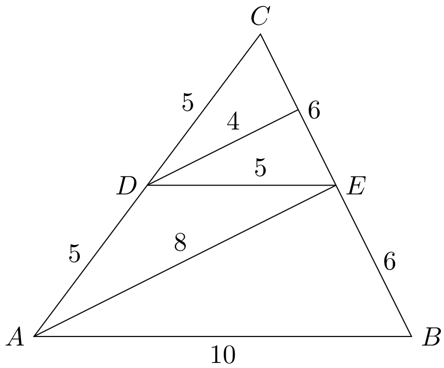
Stromisti

1.

Opravovali: **Timka Szöllősová a Michal Masrna**
Počet riešení: 69 Najkrajšie riešenie: **Eva Krajčiová**

Majme trojuholník ABC. Stred strany BC označme E a stred strany AC označme D. Aký je obsah trojuholníka DEC, ak $|CD| = 5$, $|DE| = 5$ a $|AE| = 8$?

Riešenie



Bod D je stred strany AC, takže $|AD| = |CD| = 5$ a $|AC| = 5 + 5 = 10$. Ďalej DE je stredná priečka trojuholníka ABC a $|AB| = 2 \cdot |DE| = 10$. Všimnime si, že $|AC| = |AB|$, a teda trojuholník ABC je rovnoramenný so základňou BC. Ťažnica AE na základňu je zároveň výška na túto stranu, z čoho AEB aj AEC sú pravé uhly. Z Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku AEC vieme dopočítať, že $|CE| = \sqrt{|AC|^2 - |AE|^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.

Keďže DE je stredná priečka, trojuholník DEC je podobný s celým trojuholníkom ABC v pomere $\frac{1}{2}$, takže výška na stranu EC v trojuholníku DEC bude dlhá $8 \cdot \frac{1}{2} = 4$. Hľadaný obsah trojuholníka DEC je rovný $\frac{6 \cdot 4}{2} = 12$.

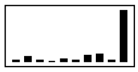
Komentár

Pri riešení tejto úlohy sa viacerým z vás pritrafilo zle interpretovať zadanie – domysleli ste si dĺžku niektorej úsečky a tým buď riešili úplne inú úlohu, alebo si zjednodušili riešenie preskočením niektorého kroku. Veríme, že tu stačí pripomenúť, že treba dvakrát čítať a raz kresliť. :)

Niektorí z vás sa zas vybrali cestou goniometrických funkcií. Riešenie pomocou nich pravdaže nemusí byť zlé, avšak v tom prípade sa musíme vyhnúť zaokrúhľovaniu. Radou by teda bolo buď sa naučiť pracovať s goniometrickými funkciami natoľko dobre, aby ste ich nepotrebovali vyčísľovať, pokiaľ nemajú tabuľkovú hodnotu (napríklad ovládaním viacerých identít), alebo sa im jednoducho vyhnúť. Verte či nie, pri výberoch úloh dbáme na to, aby sa dali vyriešiť synteticky (t. j. nie analyticky ani pomocou goniometrických funkcií). ;)

2. Opravovali: **Erik Novák a Matúš Masrna**

Počet riešení: 63 Najkrajšie riešenia: **Ľubomír Vargovčík a Lucia Kleščová**



Majme nezáporné reálne čísla a a b, pre ktoré platí $a + b = 1$. Dokážte, že platí:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} \leq 1$$

a nájdite všetky dvojice (a, b), pre ktoré nastáva aspoň v jednej nerovnosti rovnosť.

Riešenie

Dokážme obe nerovnosti samostatne.

Najskôr dokážeme, že

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} \leq 1.$$

Výraz $(a^3 + b^3)$ si vieme rozložiť na $(a + b)(a^2 + b^2 - ab)$. Potom vďaka podmienke zo zadania, že $(a + b) = 1$, vieme celú nerovnosť prepísať:

$$\frac{a^2 + b^2 - ab}{a^2 + b^2} \leq 1$$

$$1 - \frac{ab}{a^2 + b^2} \leq 1$$

$$-\frac{ab}{a^2 + b^2} \leq 0$$

Teraz a a b sú nezáporné a čitateľ je nezáporný. Menovateľ je súčet dvoch druhých mocnín, teda je nezáporný. Ľavá strana je tým pádom vždy nekladná a nerovnosť vždy platí. Rovnosť nastáva, ak je čitateľ 0, čo je práve vtedy, keď $a = 0$ alebo $b = 0$.

Teraz dokážme, že

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}.$$

Znovu upravme pomocou rozkladu:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a^2 + b^2 - ab}{a^2 + b^2}$$

$$a^2 + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2 - 2ab$$

$$0 \leq a^2 + b^2 - 2ab$$

$$0 \leq (a - b)^2$$

Na pravej strane je druhá mocnina, ktorá je nezáporná, a nerovnosť vždy platí. Rovnosť nastáva, keď $a = b$, čiže pretože $a + b = 1$, nastáva vtedy, keď $a = b = \frac{1}{2}$.

Dokázali sme obe nerovnosti, čím sme dokázali platnosť celého výrazu. Niektorá z rovností nastáva v prípadoch, kde $a = 0$ a $b = 1$, $a = 1$ a $b = 0$ alebo $a = 1/2$ a $b = 1/2$

Komentár

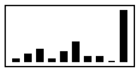
Mnohí ste sformulovali obstojný dôkaz, čo nás veľmi teší. Často sa však opakovala jedna chyba, za ktorú sme nemohli body nestrhnúť a radi by sme na ňu všetkých aj do budúcna upozornili, a to overenie podmienok.

Totižto v mnohých riešeniach došlo k úprave nerovnice vydelením výrazom $1 - 2ab$ (alebo podobným) bez ukázania, že to neobráti znamienko nerovnosti (teda, že daný výraz nie je záporný).

Toto je chyba, ktorá nastane veľmi jednoducho a pritom vás môže stáť niekoľko bodov napriek tomu, že odhliadnuc od nej je dôkaz úplne korektný alebo dokonca pekný.

3.

Opravovali: **Martin Masrna a Jano Richnavský**
Počet riešení: 47 Najkrajšie riešenie: **Michal Vodička**



Uvažujme šachovnicu o rozmeroch $k \times l$, kde k a l sú kladné celé čísla:

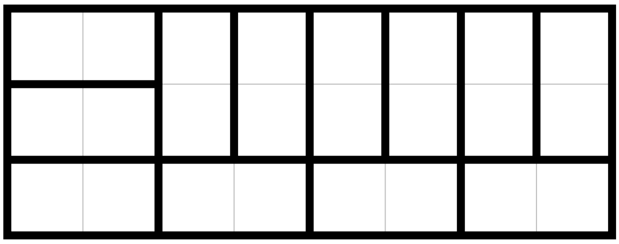
a) Dokážte, že ak $k, l \geq 2$ a kl je deliteľné 8, potom vieme šachovnicu pokryť kockami v tvare domina 2×1 tak, aby bol počet vodorovne uložených kociek rovný počtu zvislo uložených kociek.

b) Dokážte aj tvrdenie opačným smerom, a teda, že ak vieme šachovnicu pokryť vyššie zmieneným spôsobom, potom $k, l \geq 2$ a zároveň kl je deliteľné 8.

Riešenie

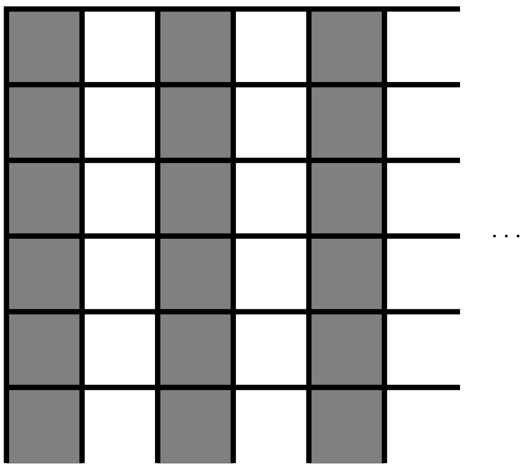
a) Ak $8 \mid kl$, máme dve možnosti.

- Možno k aj l sú párne (jedno z nich musí byť deliteľné 4, to nás ale teraz nemusí zaujímať). Potom si šachovnicu vieme rozdeliť na n štvorčekov 2×2. Každý štvorček zaberá 4 políčka, preto $8 \mid 4n$, a teda n musí byť párne. Polovicu štvorčekov potom pokryjeme horizontálnymi a polovicu štvorčekov pokryjeme vertikálnymi dominami.
- Inak jedno z čísel je nepárne a to druhé je deliteľné 8. Nepárne číslo musí byť minimálne 3, bez ujmy na všeobecnosti teda nech rozmer šachovnice je $(3 + 2a) \times 8b$ kde $a, b \in \mathbb{N}_0$. Oblasť 3×8 vieme pokryť ako na obrázku.



  Potom oblasť $3 \times 8b$ pokryjeme spojením týchto útvarov. No a zvyšok šachovnice, teda oblasť $2a \times 8b$ pokryjeme párnym počtom štvorčekov 2×2 ako v predchádzajúcej možnosti. Celú šachovnicu teda vieme pokryť rovnakým počtom horizontálnych a vertikálnych domino kociek.

b) Musí $k, l \geq 2$, inak by sme v niektorom rozmere nemohli umiestniť ani jednu kocku, a preto by bol celkový počet kociek 0 a šachovnica by neexistovala. Nech je počet vodorovne umiestnených kociek n (počet zvislo umiestnených je rovnaký). Potom je spolu $2n$ kociek a $4n$ políčok, a teda aspoň jeden z rozmerov musí byť párne číslo. Bez ujmy na všeobecnosti nech to je výška. To znamená, že šachovnica má párny počet riadkov a v každom stĺpci je párny počet políčok. Stĺpce si striedavo ofarbime dvomi farbami (ako na obrázku):



Vidíme, že horizontálne domino zaberie po jednom políčku z každej farby a vertikálne domino zaberie vždy dve políčka rovnakej farby. Z každej farby je párny počet políčok (lebo farbíme celé stĺpce a každý z nich má párny počet políčok). Vertikálne dominá spolu zaberú párny počet políčok nejakej farby, a teda aj horizontálne dominá musia spolu zabrať párny počet políčok tejto farby. A keďže každé z nich zaberie práve jedno, znamená to, že horizontálnych domín je párny počet. Pretože n je párne, tak $kl = 4n$ je deliteľné 8 a dôkaz je hotový. Ak by párny rozmer nebola výška, ale šírka, dôkaz by bol rovnaký, iba by sme ofarbili riadky a zamenili vertikálne a horizontálne dominá.

Komentár

Prvú časť úlohy zvládol takmer každý. Občas sa stalo, že v prípade jedného nepárneho rozmeru riešitelia jeden riadok vyplnili iba horizontálnymi dominami a zvyšok rozdelili na štvorce 2×2, no neukázali, že ich bude nutne dostatok na vyrovnanie počtov jednotlivých typov – za to sme body nesťahovali, avšak dávajte si na podobné prípady v budúcnosti pozor.

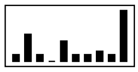
Druhá časť úlohy bola už komplikovanejšia – tomu zodpovedá aj veľká rozmanitosť prístupov k riešeniu a fakt, že túto časť mnoho riešiteľov nedotiahlo do konca. Častým problémom bolo to, že riešitelia si v tejto časti rovnako ako v prvej skladali šachovnicu a cez takto vyskladané šachovnice sa snažili ukázať to, čo potrebovali dokázať, a často pri tom používali väčšie útvary (predvyplnené časti šachovnice 2×2 alebo 4×2), z ktorých sa šachovnica vôbec nemusí skladať. Riešenie tak ani zďaleka nemôže všeobecne vysvetliť, prečo akákoľvek šachovnica, ktorá má rovnaký počet vertikálnych a horizontálnych kociek, musí mať obsah deliteľný ôsmimi.

Pri takýchto úlohách je veľmi dôležité si uvedomiť smer implikácie, ktorú dokazujeme, a s čím pracujeme, aby sa nestalo, že smery zamiešame a nakoniec z toho nevzíde nič prospešné.

Napriek tomu, že riešenia sa vzájomne naozaj rôznili, ich do konečného deväťbodového stavu priviedol statočný počet riešiteľov.

4.

Opravovali: **Viki Brezinová a Dano Onduš**
Počet riešení: 42 Najkrajšie riešenia: **Jakub Šošovička a Viera Glevitzká**



Lienka sedí na čísle 0 na číselnej osi. Každú sekundu sa pohne doľava alebo doprava o vzdialenosť 2^{x-1}, kde x označuje, koľko sekúnd ubehlo od začiatku (teda po prvej sekunde sa pohne o 1, po druhej o 2, po tretej o 4...).

a) Na ktoré čísla n na číselnej osi vie lienka stúpiť?

b) Pre ktoré čísla n na číselnej osi platí, že existuje nekonečne veľa rôznych ciest (postupností pohybov lienky), ktorými sa lienka vie dostať na číslo n?

Riešenie

Po prvej sekunde sa lienka dostane na nepárne číslo a následne sa stále bude pohybovať o párne čísla, preto sa po každom ďalšom pohybe znova dostane len na nepárne číslo. Z toho vyplýva, že lienka nevie stúpiť na žiadne párne číslo (okrem 0, kde stála na začiatku).

Ukážeme si matematickou indukciou, že lienka vie po x sekundách stáť na ľubovoľnom kladnom nepárnom čísle z od -2^x+1 do 2^x-1 vrátane. Po prvej sekunde to platí, pretože jedným pohybom sa vie dostať na -1 alebo 1.

Teraz prejdeme na indukčný krok. Predpokladajme, že po x sekundách vie stáť na ľubovoľnom nepárnom čísle od -2^x+1 do 2^x-1 vrátane. Chceme ukázať, že po $x+1$ sekundách vie stáť na ľubovoľnom kladnom nepárnom čísle od $-2^{x+1}+1$ do $2^{x+1}-1$ vrátane. Keď sa v $x+1$. sekunde pohne o 2^x doprava z každého nepárneho čísla, na ktorom z indukčného predpokladu vedela stáť po x. sekunde, tak sa dostane na každé nepárne číslo od $-2^x+1+2^x=1$ do $2^x-1+2^x=2^{x+1}-1$. Keď sa v $x+1$. sekunde pohne o 2^x doľava z každého nepárneho čísla, na ktorom z indukčného predpokladu vedela stáť po x. sekunde, tak sa dostane na každé nepárne číslo od $-2^x+1-2^x=-2^{x+1}+1$ do $2^x-1-2^x=-1$. Vďaka tomu vidíme, že po $x+1$. sekunde vie naozaj stáť na každom nepárnom čísle od $-2^{x+1}+1$ do $2^{x+1}-1$ vrátane.

Zostáva zistiť, pre ktoré z nich existuje nekonečne veľa rôznych ciest.

Zoberme si ľubovoľné nepárne číslo k. Potom existuje kladné číslo l také, že $-2^l < k < 2^l$. Z toho, čo sme si ukázali vyššie, vieme, že lienka vie stáť na čísle k po l sekundách, ale takisto aj po ľubovoľnom inom počte sekúnd väčšom ako l. To znamená, že sa na každé nepárne číslo vie dostať nekonečne veľa rôznymi cestami.

Iné riešenie

Ukážeme, že lienka vie skočiť na každé kladné nepárne číslo – na záporné sa vie dostať zmenou smeru krokov.

Ak by lienka spravila prvých l skokov doprava, tak by stála na čísle 2^l-1, keďže $1+2+\cdots+2^{l-1}=2^l-1$. Pre každý skok dĺžky $m \leq l$, ktorý spraví doľava, sa tento súčet zníži o $2m$, keďže m nielen nepripočítame, ale aj odčítame. Platí, že každé kladné nepárne číslo n vieme zapísať ako $n=2^l-1-2k$ pre každé l také, že $2^l-1 \geq n$. Preto chceme vybrať skoky doľava tak, aby súčet ich dĺžok bol k. Na to sa stačí pozrieť na reprezentáciu čísla k v binárnej sústave, ktorá existuje pre každé kladné celé číslo, a vybrať miesta s jednotkou.

Že pre každé nepárne číslo existuje nekonečne veľa ciest, vyplýva z toho, že pre každé nepárne n je nekonečne veľa vyhovujúcich l a ku každému z nich vieme nájsť vhodné k.

Komentár

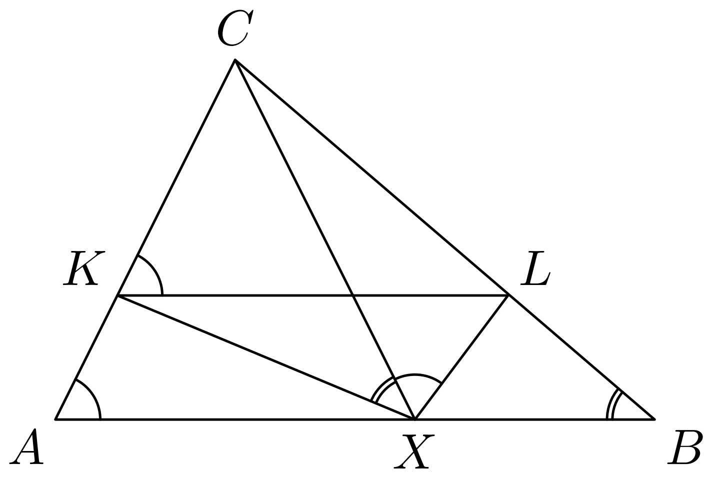
Väčšina z vás zvládla správne zodpovedať na obe otázky, body ste stratili hlavne pri pokuse ukázať, že po prvých x krokoch vie lienka stáť na ľubovoľnom nepárnom čísle od $-2^x + 1$ do $2^x - 1$ vrátane. To, že to platí pre prvých niekoľko x, ešte nezaručuje, že to bude platiť pre všetky. Použitie indukcie bolo v tomto prípade pomerne priamočiare, a tak veríme, že nabudúce vám ušetrí čas a získate vďaka nej deväť bodov.

5.

Opravovali: **Mimi Hanus a Martin Števko**
Počet riešení: 21 Najkrajšie riešenie: **Richard Vodička**

Majme trojuholník ABC. Na strane AB zvoľme bod X rôzny od A a B. Priesečník dotyčnice v bode X ku kružnici opísanej trojuholníku XBC so stranou AC označme K a priesečník dotyčnice v bode X ku kružnici opísanej trojuholníku AXC so stranou BC označme L. Dokážte, že AB je rovnobežná s KL.

Riešenie



Keďže LX je dotyčnica ku kružnici opísanej $\triangle AXC$, z úsekových uhlov (viď Mohlo by sa hodiť) medzi tetivou CX a dotyčnicou LX vieme, že $|\sphericalangle LXC| = |\sphericalangle XAC|$. Obdobne pre dotyčnicu KX a tetivu CX platí $|\sphericalangle KXC| = |\sphericalangle XBC|$. Všimnime si, že bez ohľadu na polohu bodu X budú A a L aj B a K v opačných polrovinách daných priamkou CX, takže sa nám nemôže stať, že si vyberieme obvodový uhol, ktorý je doplnkom k nášmu úsekovému.

Teraz sa pozrime na $\sphericalangle KXL$. Pretože aj body K a L budú vždy v opačných polrovinách daných CX a súčet vnútorných uhlov trojuholníka je $180°$,

$$|\sphericalangle KXL| = |\sphericalangle KXC| + |\sphericalangle LXC| = |\sphericalangle XBC| + |\sphericalangle XAC| = 180° - |\sphericalangle ACB| = 180° - |\sphericalangle KCL|.$$

To však znamená, že štvoruholník $KXLC$ má súčet protiľahlých uhlov $180°$, a preto je tetivový. Potom z obvodových uhlov nad tetivou LC ešte $|\sphericalangle LKC| = |\sphericalangle LXC| = |\sphericalangle XAC|$. Tu $\sphericalangle LKC$ a $\sphericalangle XAC$ sú súhlasné uhly, odkiaľ $AB \parallel KL$.

Komentár

V riešeniach tejto úlohy sa vyskytovala jedna nepozornosť opakujúca sa pri riešení geometrických úloh, a to prehliadnutie existencie viacerých konfigurácií. Konkrétne viacero ľudí použilo stredový uhol a potom z neho vypočítalo uhly v rovnoramennom trojuholníku s vrcholom v strede kružnice, ale pritom nezvážilo, čo sa stane, ak stredový uhol daného oblúka bude priamy alebo väčší, pretože obvodový uhol bol pravý alebo tupý. Za toto sa udeľoval bodový trest.

Okrem skutočného rozobrania viacerých prípadov sa mu dá vyhnúť aj spísaním takmer rovnakého riešenia mierne odlišným postupom, ktorý na túto prekážku nenarazí (čo spravili všetky deväťbodové riešenia). Druhá možnosť je často ľahkou cestou, takže sa nezdráhajte hľadať alternatívnu formuláciu, aj keď už ste jednu našli.

6. Opravovali: **Maťo Gbúr a Kristín Mišlanová**

Počet riešení: 25 Najkrajšie riešenie: **Marek Horváth**

Existujú tri celé čísla a, b, c také, že a a b majú práve 800 spoločných deliteľov, a a c majú práve 960 spoločných deliteľov a a, b a c majú práve 420 spoločných deliteľov?

Riešenie

Spomeňme, že v riešení budeme pracovať s tým, že delitele majú byť kladné. Ak ste však riešili úlohu aj so zápornými deliteľmi, tak to šlo úplne analogicky.

Na začiatok si uvedomme, že čísla a a b majú práve toľko spoločných deliteľov, koľko deliteľov má najväčší spoločný deliteľ a a b (označujme $NSD(a, b)$). Môžeme teda úlohu preformulovať na to, že hľadáme a, b, c také, že počet deliteľov $NSD(a, b)$ je 800, počet deliteľov $NSD(a, c)$ je 960 a pre $NSD(a, b, c)$ je to 420.

Nech také čísla a, b, c existujú. Zapíšme si ich prvočíselný rozklad (pričom ak sa nejaké prvočíslo v niektorom z nich nevyskytuje, tak daný exponent bude rovný 0).

$$
\begin{aligned}
a &= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \\
b &= p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} \\
c &= p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_k^{\gamma_k}
\end{aligned}
$$

Následne vieme ľahko napísať, ako budú vyzerať ich najväčšie spoločné delitele. V najväčšom spoločnom deliteli je každé prvočíslo umocnené na najvyššiu mocninu, ktorá sa nachádza vo všetkých číslach.

$$
\begin{aligned}
NSD(a, b) &= p_1^{min(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{min(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_k^{min(\alpha_k,\beta_k)} \\
NSD(a, c) &= p_1^{min(\alpha_1,\gamma_1)} p_2^{min(\alpha_2,\gamma_2)} \dots p_k^{min(\alpha_k,\gamma_k)} \\
NSD(a, b, c) &= p_1^{min(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)} p_2^{min(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)} \dots p_k^{min(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k)}
\end{aligned}
$$

Teraz si už ostáva len uvedomiť ako zrátať počet deliteľov týchto čísel. Vo všeobecnosti počet deliteľov čísla $x = q_1^{a_1} q_2^{a_2} \dots q_n^{a_n}$ je $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_n + 1)$, rozmyslite si prečo. Takže postupne pre čísla $NSD(a, b)$, $NSD(a, c)$, $NSD(a, b, c)$ vyjadríme počet ich deliteľov a dostávame:

$$
\begin{aligned}
(min(\alpha_1, \beta_1) + 1)(min(\alpha_2, \beta_2) + 1) \dots (min(\alpha_k, \beta_k) + 1) &= 800 = 2^5 \cdot 5^2 \\
(min(\alpha_1, \gamma_1) + 1)(min(\alpha_2, \gamma_2) + 1) \dots (min(\alpha_k, \gamma_k) + 1) &= 960 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \\
(min(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + 1)(min(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) + 1) \dots (min(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k) + 1) &= 420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7
\end{aligned}
$$

Keďže 420 je deliteľné 7, tak musí existovať také i, že zátvorka $(min(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) + 1)$ je deliteľná 7. Z toho vyplýva, že buď $(min(\alpha_i, \beta_i) + 1)$, alebo $(min(\alpha_i, \gamma_i) + 1)$ je deliteľné 7. No to následne z prvých dvoch vyjadrení implikuje, že buď 800, alebo 960 je deliteľné 7, čo je spor. Z toho vyplýva, že takéto hľadané čísla a, b a c neexistujú.

Komentár

Nebojte sa šestiek! Úloha síce vyžadovala isté znalosti z teórie čísel, no tí, ktorí sa do nej pustili, sa väčšinou dopracovali k deväťbodovému riešeniu, ktorých počet nás naozaj teší. :) Ak ste deväť bodov nedostali, bolo to zväčša preto, že ste niektoré vaše myšlienkové procesy dostatočne nevysvetlili. Skúste si v budúcnosti pri písaní riešenia predstaviť, že postup vysvetľujete niekomu, kto túto úlohu vyriešiť nevie. Takto nielen sa vyvarujete straty bodov, ale aj si overíte, či vaše riešenie dáva zmysel.

Zadania úloh zimného semestra 47. ročníka

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na `seminar.strom.sk`.

2 Druhá séria

Termín odovzdania riešení: **21. novembra 2022**

Ak nevieš pohnúť ďalej s niektorou z úloh, skús sa pozrieť na pár tipov, ktoré nájdeš na našej webovej stránke `seminar.strom.sk/media/uploads/mohlobysahodit.pdf`.

1. Majme kladné celé čísla a, b, c, pre ktoré platí, že $a^3 + b^3 + c^3$ je deliteľné 18. Dokážte, že abc je deliteľné 6.

2. Nech $ABCD$ je štvorec so stranou dlhou 1. Mimo neho majme body E a F také, že trojuholník CED je rovnostranný a trojuholník CFD je rovnoramenný s uhlami veľkosti 45 stupňov pri základni CD. Označme priesečník úsečiek CF a BE ako G a priesečník úsečiek CD a BE ako H.

a) Aká je dĺžka úsečky CH?

b) V akom pomere rozdeľuje bod G úsečku FC?

3. Miesta pri okrúhlom stole sú očíslované zaradom od 1 po n tak, že 1 susedí na jednej strane s 2 a na druhej s n. K stolu si postupne príde sadnúť n ľudí, pričom každý má priradené iné miesto. Na začiatku si však človek s miestom 1 sadol na ľubovoľné (nie nutne iné) miesto. Každý ďalší človek si už sadne na svoje miesto, prípadne na ľubovoľné najbližšie voľné miesto po obvode stola, ak je jeho miesto už obsadené. Na ktorých miestach môže sedieť človek s miestom n, ak zvyšní ľudia prichádzajú

a) v poradí od najmenšieho čísla miesta po najväčšie, teda od 2 po n?

b) v ľubovoľnom poradí?

4. Máme mriežku 7×7, ktorá má vyrezané všetky štyri rohové políčka.

a) Koľko najmenej políčok musíme zafarbiť načierno, aby neexistoval biely päťpolíčkový krížik?

b) Dokážte, že vieme do každého políčka napísať celé číslo tak, aby súčet čísel v každom päťpolíčkovom krížiku bol záporný, ale celkový súčet všetkých čísel v tabuľke bol kladný.

5. Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geq 2$ a kladné reálne čísla x_1 až x_n

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n \leq \binom{n+1}{2} + x_1 + x_2^2 + \cdots + x_n^n$$

a) v prípade, že $0 < x_i \leq 1$ pre všetky $i \in \{1, \ldots, n\}$,

b) pre ľubovoľné hodnoty x_i.

6. Neprázdna množina $M \subseteq \mathbb{Z}$ je *Mihálova*, ak spĺňa nasledujúcu podmienku: Ak $x, y \in M$ (aj ak $x = y$), potom aj $x^2 + zxy + y^2 \in M$ pre všetky $z \in \mathbb{Z}$. Nájdite všetky dvojice nenulových celých čísel m, n (vrátane prípadov, kde $m = n$) také, že jediná Mihálova množina obsahujúca aj m aj n je $\mathbb{Z}$.

Poradie po 1. sérii zimného semestra 47. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1. - 6.	Lucia Chladná	S2	GAMČABA	9	9	9	9	9	9	0	54
	Oskar Hritz	S4	GPoštKE	9	9	9	9	9	9	0	54
	Tomáš Kubrický	S2	GPoštKE	9	9	9	9	-	9	0	54
	Adam Džavoronok	S4	GPoštKE	9	9	9	9	9	9	0	54
	Martin Kopčány	S4	GJChaBR	9	9	9	9	9	9	0	54
	Anna Podmanická	S2	GVaršZA	9	0	9	9	9	9	0	54
7.	Simon Omaník	S2	GAMČABA	7	9	9	9	8	9	0	53
8. - 9.	Veronika Chovancová	S4	PiarGTN	9	9	9	9	7	9	0	52
	Richard Vodička	S2	GAlejKE	9	7	7	9	9	9	0	52
10. - 13.	Marek Horváth	S2	GKonšPO	9	9	6	2	9	9	0	51
	Eva Krajčiová	S1	GAlejKE	9	4	9	8	7	9	0	51
	Jakub Šošovička	S4	SG Cenada	9	6	9	9	9	9	0	51
	Andrej Znamenáček	S2	GAMČABA	-	8	9	8	9	9	0	51
14.	Oliver Seman	S1	GAlejKE	9	9	5	9	-	9	0	50
15.	Michal Iľkovič	S2	GSMTŠPO	9	9	7	7	9	-	0	48
16.	Natália Čigašová	S4	GPoštKE	9	6	9	9	7	6	0	46
17. - 18.	Viera Glevitzká	S4	GVBNPD	9	9	9	9	9	0	0	45
	Veronika Jakabová	S1	GAlejKE	9	9	3	6	-	9	0	45
19.	Ondrej Králik	S2	GAlejKE	9	9	6	4	-	8	0	42
20. - 21.	Janka Urbánová	Z9	GAlejKE	9	9	2	2	9	3	0	41
	Michal Vodička	Z9	GAlejKE	9	7	9	-	7	-	0	41
22.	Matúš Pokorný	S1	GAMČABA	9	9	9	1	-	-	0	37
23. - 24.	Sara Gašparová	S4	GAMČABA	9	9	9	9	-	-	0	36
	Martin Belluš	S4	GAMČABA	9	9	-	9	-	9	0	36
25. - 26.	Veronika Vodičková	S2	GAlejKE	9	9	4	-	9	-	0	35
	Lucia Kleščová	S2	GPoštKE	9	9	9	4	-	-	0	35
27. - 29.	Tomáš Sukeľ	S1	GAGLSHE	9	9	5	1	-	-	0	33
	Matúš Libák	S2	GAlejKE	9	9	5	5	-	-	0	33
	Alzbeta Klimentova	S3	GPoštKE	9	9	9	6	-	-	0	33
30. - 31.	Martin Dudjak	S1	SMládPP	9	9	5	-	-	-	0	32
	Michal Urban	S4	GAMČABA	9	9	-	7	-	7	0	32
32.	Soňa Vasiľová	S2	GKukuPP	9	9	5	4	-	-	0	31
33. - 40.	Štefan Vašak	S4	GPoštKE	9	9	9	-	-	-	0	27
	Miriam Horváthová	S4	GŠtúrMI	9	9	9	-	-	-	0	27
	Oskar Cacara	S1	GPoštKE	9	9	-	-	-	-	0	27
	Martin Šmilňák	S3	GAlejKE	9	9	-	-	9	-	0	27
	Branislav Ječim	S3	GŠkolSN	9	9	9	-	-	-	0	27
	Samuel Výrostek	S4	SZŠ Moyzesova 17	9	7	2	5	-	4	0	27
	Ján Stupák	S1	GAlejKE	9	9	-	-	-	-	0	27
	Marek Ištok	S1	GJARMPO	9	6	2	4	-	-	0	27
41. - 42.	Natália Poliačiková	S2	GPoštKE	9	4	5	4	-	-	0	26
	Nina Anna Betáková	S1	GAGLSHE	7	9	2	1	0	-	0	26
43.	Vladimír Slanina	S2	GPoštKE	9	9	-	7	-	-	0	25
44.	Natália Tkáčová	S1	SMládPP	9	5	1	4	-	-	0	24
45. - 46.	Ľubomír Vargovčík	S4	GPoštKE	9	9	5	-	-	-	0	23
	Viliam Geffert	S4	GPoštKE	9	9	5	0	-	-	0	23
47.	Sarah Klopstock	Z9	ŠpMNDaG	4	9	4	1	-	0	0	22
48. - 51.	Katarína Farbulová	S2	GPoštKE	9	9	-	-	-	-	0	18
	Peter Varga	S2	GPoštKE	9	9	-	-	-	-	0	18
	Tomáš Boledovič	Z9	CZNarBA	9	1	4	-	-	-	0	18
	Matúš Jonaštík	S3	GAMČABA	9	9	-	-	-	-	0	18
52.	Michal Almáši	S4	GPMláKE	8	9	-	-	-	-	0	17
53. - 55.	Bianka Gurská	S3	GPoštKE	9	7	-	-	-	-	0	16
	Terézia Stanová	S3	EGJAKKE	9	7	-	-	-	-	0	16
	Adela Horváthová	S3	GPoštKE	9	7	-	-	-	-	0	16
56. - 58.	Šimon Borovský	S2	GAMČABA	9	6	-	-	-	-	0	15
	Alica Cimráková	S2	BGMHSuč	9	6	-	-	-	-	0	15
	Michal Ferdinandy	Z9	GAlejKE	9	1	2	1	-	-	0	15

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
59.	Miroslava Pokorná	S3	GAMČABA	5	9	-	-	-	-	0	14
60. - 61.	Erik Jochman	S3	GAlejKE	4	9	-	-	-	-	0	13
	Alexandra Kopčányová	S1	GJChaBR	9	1	1	1	-	-	0	13
62.	Juraj Kramár	S2	GAlejKE	8	-	4	-	-	-	0	12
63.	Paulína Tkáčová	S2	SMládPP	9	-	-	1	-	-	0	10
64. - 67.	Maxima Anna Alžbeta Bednarčíková	S2	GAlejKE	9	-	-	-	-	-	0	9
	Tomáš Jakubec	S2	TAkadSN	9	-	-	-	-	-	0	9
	Katarína Polanská	S2	CSŠ	8	-	-	1	-	0	0	9
	Abigail Beblavá	S2	GAlejKE	9	-	-	-	-	-	0	9
68.	Kalista Semancová	S2	GAGLSHE	4	2	1	-	-	-	0	7
69.	Ladislav Jakab	S3	SOTBrKN	2	1	0	0	0	0	0	3
70.	František Bublák	Z8	GABerSC	2	-	-	-	-	-	0	2

Názov: STROM – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 2 • November 2022 • Zimný semester 47. ročníka (2022/2023)
Web: `seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`
Riešenia: Prijímame odovzdaním na webe a v prípade poruchy stránky na adrese `riesenia.strom@strom.sk`.

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Web: `zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `info@strom.sk`

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.