



## Ahoj!

Práve sa ti dostal do rúk časopis STROMu! Je to matematický seminár, vďaka ktorému sa na konci polroka môžeš dostať preč zo školy na celý týždeň, počas ktorého zažiješ matematiku v netradičnej podobe a množstvo zaujímavých hier. Ak si stredoškolač, je presne pre teba! Stačí vyriešiť dvanásť (či toľko, koľko dokážeš) nevšedných úloh, ktorých riešenie nám pošleš dvakrát za polrok, my ich opravíme, a ak budú dostatočne dobré, môžeš očakávať zážitky ako nikdy predtým. V tomto časopise nenájdeš len spomínané úlohy, ale aj pravidlá. Tešíme sa na tvoje riešenia!

STROMáci

## Košický Matboj

Aj tento rok pre vás pripravujeme ďalší ročník súťaže Košický Matboj, ktorý sa uskutoční 27. októbra 2022 na Gymnáziu, Alejová 1 v Košiciach. Na našej stránke [seminar.strom.sk/sk/matboj](http://seminar.strom.sk/sk/matboj) môžete nájsť oficiálnu pozvánku a informácie o prihlasovaní, rovnako ako aj oficiálne pravidlá súťaže či zadania a riešenia úloh z predchádzajúcich ročníkov. Dúfame, že sa nám podarí stretnúť v čo najväčšom počte a tešíme sa na vás.

## Pokyny pre riešiteľov

**Seminár STROM** je určený pre žiakov prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných a bilingválnych gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci nižších ročníkov, v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci.

Každý ročník pozostáva z dvoch semestrov – zimného a letného – ktoré sú zakončené matematickým sústredením pre tých najlepších riešiteľov. Jeden semester sa skladá z dvoch sérií, z ktorých každá obsahuje 6 úloh spravidla zoradených od najľahšej po najťažšiu.

### Registrácia

Registrovať do semestra sa vieš vytvorením profilu na našej webovej stránke. Následne si vyplníš povinné údaje v užívateľskom profile – odkaz Aktualizovať profil v sekcii Správa účtu. Tieto údaje potrebujeme, aby sme sa s tebou mohli skontaktovať aj v čase, keď nie si v škole, v prípade pozývania na sústredenie, a tiež, aby sme ňa mohli uverejniť v poradí riešiteľov aktuálnej časti semináru. Prihláška je povinná pre všetkých riešiteľov semináru. Na tejto stránke nájdeš takisto svoje opravené a obodované riešenia bez ohľadu na to, ako si ich poslal.

Aby sme ti celý proces prihlasovania uľahčili, na adrese [seminar.strom.sk/media/uploads/navod.pdf](http://seminar.strom.sk/media/uploads/navod.pdf) sme vytvorili jednoduchý návod.

### Ako písať riešenie?

**Úlohy** rieš zásadne samostatne, neodpisuj, v riešeniach vysvetľuj celý svoj myšlienkový postup podobne ako v Matematickej olympiáde. Nezabúdaj, že ak má byť tvoje riešenie matematicky správne, tak musí obsahovať **presné výpočty**, takže čísla, s ktorými počítáš, nemôžu byť zaokrúhlené (napr. ak použiješ kalkulačku, ktorá každú hodnotu spočíta len na určitý počet desiatinných miest) alebo odmerané pravítkom. Zároveň opravovateľ musí **vedieť skontrolovať** tvoje riešenie za **primeraný čas**, takže priložiť 100 000 možností vypísaných počítačom nemôžeme ohodnotiť plným počtom bodov.

Svoje riešenia posielaj cez našu webovú stránku. Pri opravovaní sa držíme zásady, že čo sa nedá prečítať, nemôže byť ohodnotený bodmi. Preto zvaž, či nenapíšeš svoje riešenia na počítači. **Riešenie** každej úlohy píš na samostatný papier **formátu A4**, respektíve do samostatného súboru, na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by ti nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráť sa na nás prostredníctvom komentárov k úlohám na našej stránke, cez e-mail [strom@strom.sk](mailto:strom@strom.sk) alebo osobne.

### Ako odovzdať riešenie?

Riešenia nám zasielaj najneskôr v deň termínu série do 23.59. Svoje riešenia nám môžeš zaslať nasledujúcimi spôsobmi:

- Nahrať na stránku po prihlásení. Súbor s riešením odovzdáš jednoducho po prihlásení do svojho užívateľského účtu – tlačidlo Odovzdať pri konkrétnom príklade v sekcii Úlohy. Riešenia odovzdávajú primárne vo formáte PDF, portál na tvoje riziko zvládne aj konverziu z iných formátov ako je JPG, PNG, či DOC (avšak konverzia nemusí prebehnúť správne).
- Poslať na e-mailovú adresu [riesenia.strom@strom.sk](mailto:riesenia.strom@strom.sk) s predmetom STROM vo formáte PDF (každý príklad v samostatnom súbore), no výlučne v prípade, že:
  - sa na našej strane vyskytli nejaké technické problémy s odovzďavaním (stále musíš odoslať riešenia najneskôr v deň termínu série do 23.59) alebo
  - posielaš riešenia po termíne, za znížený počet bodov (bližšie informácie v sekcii „Bodovanie“).

### Bodovanie

Bodovanie úloh závisí od správnosti a kvality riešenia a za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Body môžeš získať aj za čiastočné vyriešenie zadaných úloh, preto sa neboj poslať aj svoje neúplné riešenia. Ak budú obsahovať dobré nápady, radi ti za ne dáme nejaké body.

Do celkového poradia sa započítavajú body takto:

- **štvrtáci, oktáva:** všetky vyriešené úlohy
- **treťiaci, septima:** všetky vyriešené úlohy
- **druháci, sexta:** päť najlepšie vyriešených úloh plus štvrtý najvyšší bodový zisk z týchto piatich úloh
- **prváci, kvinta a mladší:** päť najlepšie vyriešených úloh plus druhý najvyšší bodový zisk z týchto piatich úloh

## Príklad

Štyria bratia, štvrták Vlado, tretiak Fero, druhák Jaro a prvák Marcel, vyriešili všetky úlohy úplne rovnako (zhodou náhod, že) za 3, 2, 4, 1, 5 a 4 body. Vlado potom získal  $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$  bodov, Fero tiež získal  $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$  bodov, Jaro  $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 3 = 21$  bodov a Marcel  $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 4 = 22$  bodov. Jasný, nie?

Hodnotený budú len tie časti riešenia, ktorých správnosť je možné overiť v primeranom čase. V prípade, že nie si spokojný s bodovým ohodnotením tvojho riešenia, môžeš nám do dvoch týždňov od opravenia riešenia zaslať e-mailom sťažnosť a tá bude prešetrená. Riešenie založené na využití výpočtovej techniky spravidla nebude ohodnotený vysokým počtom bodov.

## Riešenia po termíne

V prípade, že svoje riešenie nestihneš odovzdať do termínu, riešenie ti opravíme len v prípade, že nám bude doručené do siedmich dní od termínu série. V tomto prípade ti za oneskorenie strhujeme body. Body sa strhávajú nasledovne, podľa dĺžky omeškania:

- do 24 hodín: 2/3 bodov zaokrúhlené nahor
- viac ako 24 hodín a do siedmich dní: 1/2 bodov zaokrúhlená nahor
- viac ako sedem dní: riešenie neopravujeme

Vo výnimočných prípadoch môžeme body za riešenie neznižovať.

## Odpisovanie

Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú aj za odpisovanie. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdeš úlohu riešenú v literatúre, uveď názov, autora a stranu, inak riskuješ stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie).

## Hlasy

Okrem bodov môžeš získať aj hlasy. Kladné hlasy môžeš získať za pekné a originálne riešenia úloh a riešiteľov s najväčším počtom hlasov na konci semestra odmeníme. Avšak môžeme udeliť aj záporné hlasy, napríklad za odpisovanie alebo veľmi neelegantné riešenie (napríklad skúšanie obrovského počtu možností pomocou programu, riešenie z literatúry) a riešiteľov, ktorí budú mať na konci semestra -3 hlasy alebo menej, môžeme nepozvať na sústredenie aj v prípade, že by na to mali dostatok bodov.

## Sústredenie

Sústredenie je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Sústredenie je určené najmä pre študentov stredných škôl (a im zodpovedajúcich ročníkov na viacročných gymnáziách), mladší žiaci (tí, ktorí počas sústredenia nie sú stredoškôlkami) môžu byť pozvaní ako náhradníci. V prvom rade sú pozvaní víťazi Matboja a tí riešitelia STROMu, ktorí získali v semestri aspoň 30 bodov, nie však súťažiaci a riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou. Ďalší účastníci sú pozývaní podľa poradia Matboja. V prípade nízkeho počtu riešiteľov je možné pozvať na sústredenie aj riešiteľov z minulého semestra podľa poradia alebo riešiteľov, ktorí nedosiahli hranicu 30 bodov.

Účasť na sústredení je podmienená účasťou na celej dĺžke trvania sústredenia. O prípadnú výnimku je nutné požiadať kontaktnú osobu e-mailom alebo v prihlasovacom formulári. Kontaktná osoba túto žiadosť posúdi a v čo najbližšom čase zašle odpoveď. V prípade porušenia tejto podmienky môžeme účastníka nepozvať na najbližšie sústredenie.

Počas sústredenia je účastník povinný rešpektovať pravidlá ustanovené Poriadkom pobytových akcií (plné znenie Poriadku pobytových akcií nájdeš na [seminar.strom.sk/media/uploads/poriadokpobytovychakcii.pdf](http://seminar.strom.sk/media/uploads/poriadokpobytovychakcii.pdf)).

## Zadania úloh zimného semestra 47. ročníka

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na [seminar.strom.sk](http://seminar.strom.sk).

# 1 Prvá séria

Termín odovzdania riešení: **17. októbra 2022**

Ak nevieš pohnúť ďalej s niektorou z úloh, skús sa pozrieť na pár tipov, ktoré nájdeš na našej webovej stránke [seminar.strom.sk/media/uploads/mohlobysahodit.pdf](http://seminar.strom.sk/media/uploads/mohlobysahodit.pdf).

1. Majme trojuholník  $ABC$ . Stred strany  $BC$  označme  $E$  a stred strany  $AC$  označme  $D$ . Aký je obsah trojuholníka  $DEC$ , ak  $|CD| = 5$ ,  $|DE| = 5$  a  $|AE| = 8$ ?
2. Majme nezáporné reálne čísla  $a$  a  $b$ , pre ktoré platí  $a + b = 1$ . Dokážte, že platí:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} \leq 1$$

a nájdite všetky dvojice  $(a, b)$ , pre ktoré nastáva aspoň v jednej nerovnosti rovnosť.

3. Uvažujme šachovnicu o rozmeroch  $k \times l$ , kde  $k$  a  $l$  sú kladné celé čísla:
  - a) Dokážte, že ak  $k, l \geq 2$  a  $kl$  je deliteľné 8, potom vieme šachovnicu pokryť kockami v tvare domina  $2 \times 1$  tak, aby bol počet vodorovne uložených kociek rovný počtu zvislo uložených kociek.
  - b) Dokážte tvrdenie aj opačným smerom, a teda, že ak vieme šachovnicu pokryť vyššie zmieneným spôsobom, potom musí platiť  $k, l \geq 2$  a zároveň  $kl$  je deliteľné 8.
4. Lienka sedí na čísle 0 na číselnej osi. Každú sekundu sa pohne doľava alebo doprava o vzdialenosť  $2^{x-1}$ , kde  $x$  označuje, koľko sekúnd ubehlo od začiatku (teda po prvej sekunde sa pohne o 1, po druhej o 2, po tretej o 4, ...).
  - a) Na ktoré čísla  $n$  na číselnej osi vie lienka stúpiť?
  - b) Pre ktoré čísla  $n$  na číselnej osi platí, že existuje nekonečne veľa rôznych ciest (postupností pohybov lienky), ktorými sa lienka vie dostať na číslo  $n$ ?
5. Majme trojuholník  $ABC$ . Na strane  $AB$  zvolíme bod  $X$  rôzny od  $A$  a  $B$ . Priesečník dotyčnice v bode  $X$  ku kružnici opísanej trojuholníku  $XBC$  so stranou  $AC$  označme  $K$  a priesečník dotyčnice v bode  $X$  ku kružnici opísanej trojuholníku  $AXC$  so stranou  $BC$  označme  $L$ . Dokážte, že  $AB$  je rovnobežná s  $KL$ .
6. Existujú tri celé čísla  $a, b, c$  také, že  $a$  a  $b$  majú práve 800 spoločných deliteľov,  $a$  a  $c$  majú práve 960 spoločných deliteľov a  $a, b$  a  $c$  majú práve 420 spoločných deliteľov?

# 2 Druhá séria

Termín odovzdania riešení: **21. novembra 2022**

Ak nevieš pohnúť ďalej s niektorou z úloh, skús sa pozrieť na pár tipov, ktoré nájdeš na našej webovej stránke [seminar.strom.sk/media/uploads/mohlobysahodit.pdf](http://seminar.strom.sk/media/uploads/mohlobysahodit.pdf).

1. Majme kladné celé čísla  $a, b, c$ , pre ktoré platí, že  $a^3 + b^3 + c^3$  je deliteľné 18-timi. Dokážte, že  $abc$  je deliteľné 6-timi.
2. Nech  $ABCD$  je štvorec so stranou dlhou 1. Mimo neho majme body  $E$  a  $F$  také, že trojuholník  $CED$  je rovnostranný a trojuholník  $CFD$  je rovnoramenný s uhlami veľkosti 45 stupňov pri základni  $CD$ . Označme priesečník úsečiek  $CF$  a  $BE$  ako  $G$  a priesečník úsečiek  $CD$  a  $BE$  ako  $H$ .
  - a) Aká je dĺžka úsečky  $CH$ ?
  - b) V akom pomere rozdeľuje bod  $G$  úsečku  $FC$ ?
3. Miesta pri okrúhlom stole sú očíslované zaradom od 1 po  $n$  tak, že 1 susedí na jednej strane s 2 a na druhej s  $n$ . K stolu si postupne prídú sadnúť  $n$  ľudí, pričom každý má priradené iné miesto. Na začiatku si však človek s miestom 1 sadol na ľubovoľné (nie nutne iné) miesto. Každý ďalší človek si už sadne na svoje miesto, prípadne na ľubovoľné najbližšie voľné miesto po obvodu stola, ak je jeho miesto už obsadené. Na ktorých miestach môže sedieť človek s miestom  $n$ , ak zvyšní ľudia prichádzajú
  - a) v poradí od najmenšieho čísla miesta po najväčšie, teda od 2 po  $n$ ?
  - b) v ľubovoľnom poradí?
4. Máme mriežku  $7 \times 7$ , ktorá má vyrezané všetky štyri rohové políčka.
  - a) Koľko najmenej políčok musíme zafarbiť načierno tak, aby neexistoval biely 5-políčkový krížik?
  - b) Dokážte, že do každého políčka vieme napísať celé číslo tak, aby súčet čísel v každom 5-políčkovom krížiku bol záporný, ale celkový súčet všetkých čísel v tabuľke bol kladný.
5. Dokážte, že pre každé celé číslo  $n \geq 2$  a kladné reálne čísla  $x_1, x_2, \dots, x_n$  platí
$$x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n \leq \binom{n+1}{2} + x_1 + x_2^2 + \dots + x_n^n$$
  - a) v prípade, že  $0 < x_i \leq 1$  pre všetky  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,
  - b) pre ľubovoľné hodnoty  $x_i$ .
6. Neprázdna množina  $M \subseteq \mathbb{Z}$  je *Mihálova*, ak spĺňa podmienku: Ak  $x, y \in M$  (aj pre  $x = y$ ), potom aj  $x^2 + zxy + y^2 \in M$  pre všetky  $z \in \mathbb{Z}$ . Nájdite všetky dvojice nenulových celých čísel  $m, n$  (vrátane prípadov  $m = n$ ) také, že jediná Mihálova množina obsahujúca aj  $m$  aj  $n$  je  $\mathbb{Z}$ .

**Názov:** STROM – korešpondenčný matematický seminár  
Číslo 1 • September 2022 • Zimný semester 47. ročníka (2022/2023)

**Web:** [seminar.strom.sk](http://seminar.strom.sk)

**E-mail:** [strom@strom.sk](mailto:strom@strom.sk)

**Riešenia:** Prijímame odovzdaním na webe a v prípade poruchy stránky na adrese [riesenia.strom@strom.sk](mailto:riesenia.strom@strom.sk).

**Vydáva:** Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

**Web:** [zdruzenie.strom.sk](http://zdruzenie.strom.sk)

**E-mail:** [info@strom.sk](mailto:info@strom.sk)