



Ahoj!

Práve sa Ti dostal do rúk časopis STROMu! Je to matematický seminár, vďaka ktorému sa na konci polroka môžeš dostať preč zo školy na celý týždeň, počas ktorého zažiješ matematiku v netradičnej podobe a množstvo zaujímavých hier. Ak si stredoškolač, je presne pre Teba! Stačí vyriešiť dvanásť (či toľko, koľko dokážeš) nevšedných úloh, ktorých riešenie nám pošleš dvakrát za polrok, my ich opravíme, a ak budú dostatočne dobré, môžeš očakávať zážitky ako nikdy predtým. V tomto časopise nenájdeš len spomínané úlohy, ale aj pravidlá. Tešíme sa na Tvoje riešenia!

STROMáci

Košický Matboj

Aj tento rok pre Vás pripravujeme ďalší ročník súťaže Košický Matboj, ktorý sa uskutoční 27. októbra 2021, samozrejme, ak to dovoľí aktuálna situácia a epidemiologické opatrenia. Pozvánky s presnejšími informáciami spolu s inštrukciami na prihlasovanie rozpošleme na školy koncom septembra. V prípade záujmu si pravidlá, zadania a riešenia predchádzajúcich ročníkov môžete pozrieť už teraz na našej stránke seminar.strom.sk/sk/matboj. Dúfame, že sa nám tento rok podarí stretnúť v čo najväčšom počte a tešíme sa na Vás.

Kôš

Túto jeseň sa uskutoční už tretí ročník košickej šifrovačky Kôš určenej pre začiatočníkov, pokročilých a aj profíkov. Desiat zaujímavých šifier vás potrápi 16. októbra, a to nielen v Košiciach, ale aj online. Viac informácií a prihlasovanie nájdete na seminar.strom.sk/sifrovacka/info.

Pokyny pre riešiteľov

Seminár STROM je určený pre žiakov prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných a bilingválnych gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci nižších ročníkov, v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci.

Každý ročník pozostáva z dvoch semestrov – zimného a letného – ktoré sú zakončené matematickým sústredením pre tých najlepších riešiteľov. Jeden semester sa skladá z dvoch sérií, z ktorých každá obsahuje 6 úloh spravidla zoradených od najľahšej po najťažšiu.

Registrácia

Registrovať do semestra sa vieš tak, že si vytvoríš profil na našej webovej stránke. Následne si vyplníš povinné údaje v užívateľskom profile – odkaz Aktualizovať profil v sekcii Správa účtu. Tieto údaje potrebujeme, aby sme sa s tebou mohli skontaktovať aj v čase, keď nie si v škole, v prípade pozývania na sústredenie, a tiež, aby sme ťa mohli uverejniť v poradí riešiteľov aktuálnej časti semináru. Prihláška je povinná pre všetkých riešiteľov semináru. Na tejto stránke nájdeš takisto svoje opravené a obodované riešenia bez ohľadu na to, ako si ich poslal.

Aby sme ti celý proces prihlasovania uľahčili, na adrese seminar.strom.sk/media/uploads/navod.pdf sme vytvorili jednoduchý návod.

Ako písať riešenie?

Úlohy rieš zásadne samostatne, neodpisuj, v riešeníach vysvetľuj celý svoj myšlienkový postup podobne ako v Matematickej olympiáde. Svoje riešenia posielaš cez našu webovú stránku. Pri opravovaní sa držíme zásady, že čo sa nedá prečítať, nemôže byť ohodnotené bodmi. Preto zvaž, či nenapíšeš svoje riešenia na počítači.

Riešenie každej úlohy píš na samostatný papier **formátu A4**, respektíve do samostatného súboru, na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by ti nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráť sa na nás prostredníctvom komentárov k úlohám na našej stránke, cez e-mail strom@strom.sk alebo osobne.

Ako odovzdať riešenie?

Riešenia nám zasielaj najneskôr v deň termínu série do 23.59. Svoje riešenia nám môžeš zaslať nasledujúcimi spôsobmi:

- Nahrať na stránku po prihlásení. Súbor s riešením odovzdáš jednoducho po prihlásení do svojho užívateľského účtu – tlačidlo Odovzdať pri konkrétnom príklade v sekcii Úlohy. Riešenia odovzdávajú primárne vo formáte PDF, portál na tvoje riziko zvládne aj konverziu z iných formátov ako je JPG, PNG, či DOC (avšak konverzia nemusí prebehnúť správne).
- Poslať na e-mailovú adresu riesenia.strom@strom.sk s predmetom STROM vo formáte PDF (každý príklad v samostatnom súbore), no výlučne v prípade, že:
 - sa na našej strane vyskytli nejaké technické problémy s odovzďavaním (stále musíš odoslať riešenia najneskôr v deň termínu série do 23.59) alebo
 - posielaš riešenia po termíne, za znížený počet bodov (bližšie informácie v sekcii „Bodovanie“).

Bodovanie

Bodovanie úloh závisí od správnosti a kvality riešenia a za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Body môžeš získať aj za čiastočné vyriešenie zadaných úloh, preto sa neboj poslať aj svoje neúplné riešenia. Ak budú obsahovať dobré nápady, radi ti za ne dáme nejaké body.

Do celkového poradia sa započítavajú body takto:

- **štvrtáci, oktáva:** všetky vyriešené úlohy
- **treťiaci, septima:** všetky vyriešené úlohy
- **druháci, sexta:** päť najlepšie vyriešených úloh plus štvrtý najvyšší bodový zisk z týchto piatich úloh
- **prváci, kvinta a mladší:** päť najlepšie vyriešených úloh plus druhý najvyšší bodový zisk z týchto piatich úloh

Príklad

Štyria bratia, štvrták Vlado, tretiak Fero, druhák Jaro a prvák Marcel, vyriešili všetky úlohy úplne rovnako (zhodou náhod, že) za 3, 2, 4, 1, 5 a 4 body. Vlado potom získal $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$ bodov, Fero tiež získal $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$ bodov, Jaro $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 3 = 21$ bodov a Marcel $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 4 = 22$ bodov. Jasné, nie?

Hodnotené budú len tie časti riešenia, ktorých správnosť je možné overiť v primeranom čase. V prípade, že nie si spokojný s bodovým ohodnotením tvojho riešenia, môžeš nám do dvoch týždňov od opravenia riešenia zaslať e-mailom sťažnosť a tá bude prešetrená. Riešenie založené na využití výpočtovej techniky spravidla nebude ohodnotené vysokým počtom bodov.

Riešenia po termíne

V prípade, že svoje riešenie nestihneš odovzdať do termínu, riešenie ti opravíme len v prípade, že nám bude doručené do siedmich dní od termínu série. V tomto prípade ti za oneskorenie strhneme body. Body sa strhávajú nasledovne, podľa dĺžky omeškania:

- do 24 hodín: 2/3 bodov zaokrúhlených nahor
- viac ako 24 hodín a do siedmich dní: 1/2 bodov zaokrúhlených nahor
- viac ako sedem dní: riešenie neopravujeme

Vo výnimočných prípadoch môžeme body za riešenie neznížiť.

Nápovedy (novinka!)

Deň po termíne série sa zverejnia nápovedy k úlohám 5 a 6. Po termíne série máte ešte 24 hodín na odovzdanie úlohy 5 a 6 za 2/3 bodov, a potom ešte ďalších 6 dní na vyriešenie týchto úloh s pomocou nápovedy za polovicu bodov. Opravovať budeme posledné odovzdané riešenie.

Odpisovanie

Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú aj za odpisovanie. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdeš úlohu riešenú v literatúre, uveď názov, autora a stranu, inak riskuješ stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie).

Hlasy

Okrem bodov môžeš získať aj hlasy. Kladné hlasy môžeš získať za pekné a originálne riešenia úloh a riešiteľov s najväčším počtom hlasov na konci semestra odmeníme. Avšak môžeme udeliť aj záporné hlasy, napríklad za odpisovanie alebo veľmi neelegantné riešenie (napríklad skúšanie obrovského počtu možností pomocou programu, riešenie z literatúry) a riešiteľov, ktorí budú mať na konci semestra -3 hlasy alebo menej, môžeme nepozvať na sústredenie aj v prípade, že by na to mali dostatok bodov.

Sústredenie

Sústredenie je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Zúčastňujú sa ho najlepší riešitelia podľa záverečného poradia. Sústredenie je určené najmä pre študentov stredných škôl (a im príslušných ročníkov na osemročnom gymnáziu), mladší žiaci (tí, ktorí počas sústredenia nie sú stredoškólakmi) môžu byť pozvaní ako náhradníci. Účastníci a náhradníci sú pozývaní podľa poradia STROMU a Matboja, nie však tí riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou. V prípade nízkeho počtu riešiteľov je možné pozvať na sústredenie aj riešiteľov z minulého semestra podľa poradia.

Účasť na sústredení je podmienená účasťou na celej dĺžke trvania sústredenia. O prípadnú výnimku je nutné požiadať kontaktnú osobu e-mailom alebo v prihlasovacom formulári. Kontaktná osoba túto žiadosť posúdi a v čo najbližšom čase zašle odpoveď. V prípade porušenia tejto podmienky môžeme účastníka nepozvať na najbližšie sústredenie.

Zadania úloh zimného semestra 46. ročníka

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na seminar.strom.sk.

1 Prvá séria

Termín odovzdania riešení: **25. október 2021**

Ak nevieš pohnúť ďalej s niektorou z úloh, skús sa pozrieť na pár tipov, ktoré nájdeš na našej webovej stránke seminar.strom.sk/media/uploads/mohlobysahodit.pdf.

1. Nech a a b sú kladné celé čísla a c je kladné reálne číslo, pre ktoré platí:

$$\frac{a+1}{b+c} = \frac{b}{a}.$$

Dokážte, že $c \geq 1$.

2. Nech m je kladné celé číslo. Označme $a < b < c < d$ štyroch najmenších kladných deliteľov m . Nájdite všetky také m , pre ktoré platí $m = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.
3. Nech ABC je trojuholník a a, b, c sú postupne dĺžky jeho strán oproti vrcholom A, B a C . Nech S je obsah tohto trojuholníka. Dokážte, že ak P je bod vo vnútri trojuholníka ABC , pre ktorý platí $a|PA| + b|PB| + c|PC| = 4S$, tak potom P je ortocentrum ABC .
4. V tabuľke 10×10 sú napísané všetky čísla od 1 do 100, každé práve v jednom políčku. V každom riadku zafarbíme tretie najväčšie číslo. Ukážte, že existuje riadok, v ktorom je súčet čísel menší alebo rovný súčtu zafarbených čísel.
5. Nech $p \geq 3$ je prvočíslo. Skokan Jozef skáče po p kameňoch usporiadaných do kruhu. Začína na niektorom z kameňov a v k -tom skoku sa posunie o k kameňov v smere hodinových ručičiek. Koľko rôznych kameňov navštívi počas prvých $p-1$ skokov?
6. Štvorsten $ABCD$, ktorého každá stena je ostrouhlý trojuholník, je vpísaný do sféry so stredom v bode O . Priamka prechádzajúca bodom O kolmá na rovinu ABC pretína túto sféru v bode D' , ktorý leží na opačnej strane roviny ABC ako bod D . Priamka DD' pretína rovinu ABC v bode P , ktorý leží vnútri trojuholníka ABC . Dokážte, že ak $|\angle APB| = 2|\angle ACB|$, tak $|\angle ADD'| = |\angle BDD'|$.

2 Druhá séria

Termín odovzdania riešení: **22. november 2021**

Ak nevieš pohnúť ďalej s niektorou z úloh, skús sa pozrieť na pár tipov, ktoré nájdeš na našej webovej stránke seminar.strom.sk/media/uploads/mohlobysahodit.pdf.

1. Žanetka má dve spravodlivé hracie kocky (všetky čísla na nich padajú s rovnakou pravdepodobnosťou). Kristín má dve špeciálne hracie kocky, ktoré nie sú spravodlivé, ale sú totožné (napríklad, ak na jednej padá šestka s pravdepodobnosťou $1/2$, tak aj na druhej). Zistite, ktorá z nich má vyššiu šancu hodiť dve rovnaké čísla.
2. Mihál a Martin hrajú hru na štvorcovej mriežke 6×6 . Vo svojom ťahu každý hráč zapíše do ľubovoľnej prázdnej bunky ľubovoľné racionálne číslo, ktoré sa ešte nenachádza nikde v mriežke. Začína Mihál a potom sa pravidelne striedajú. Keď budú vyplnené všetky políčka mriežky, v každom riadku sa zafarbí políčko s najväčším číslom. Mihál vyhrá, ak vie spojiť prvý a posledný rad čiarou prechádzajúcou len po zafarbených políčkach (čiara môže prechádzať aj rohom, ktorým susedia dve zafarbené políčka) a Martin vyhrá, ak mu v tom zabráni. Kto má v tejto hre víťaznú stratégiu a akú?
3. Nech ABC je trojuholník s $|AC| > |AB|$ a U je stred kružnice opísanej tomuto trojuholníku. Dotyčnice ku kružnici opísanej tomuto trojuholníku v bodoch A a B sa pretínajú v bode T . Os strany BC pretína stranu AC v bode S . Ukážte, že body A, B, S, T a U ležia na kružnici a že priamka ST je rovnobežná s priamkou BC .
4. Dokážte, že neexistuje prvočíslo p , pre ktoré by existoval polynóm $px^2 + ax + b$ v premennej x s celočíselnými koeficientami a, b a dvoma rôznymi racionálnymi koreňmi v intervale $(0, 1)$.
5. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x a y platí $f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$, kde $\lfloor x \rfloor$ je najväčšie celé číslo menšie alebo rovné x .
6. Po štvorcovej tabuľke $(4k + 2) \times (4k + 2)$ sa pohybuje prefíkaný leňochod len medzi štvorčekmi susediacimi hranou. Leňochod spraví nasledovnú prechádzku: začne v rohovom štvorčeku tabuľky, prejde každým štvorčekom práve raz a skončí na mieste, kde začal. V závislosti od k určte najväčšie prirodzené číslo n také, že v tabuľke musí existovať riadok alebo stĺpec, do ktorého leňochod vstúpil aspoň n -krát (vstúpiť do riadku/stĺpca znamená presunúť sa z iného riadku/stĺpca do tohto riadku/stĺpca).

Názov:	STROM – korešpondenčný matematický seminár Číslo 1 • September 2021 • Zimný semester 46. ročníka (2021/2022)
Web:	seminar.strom.sk
E-mail:	strom@strom.sk
Riešenia:	Prijímame odovzdaním na webe a v prípade poruchy stránky na adrese riesenia.strom@strom.sk .
Vydáva:	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Web:	zdruzenie.strom.sk
E-mail:	info@strom.sk