



Pozdravujeme vás, STROMáci, STROMáčky,

z tej duše pozdravujeme vás! Leto sa nám končí a my sa na naše krásne zážitky môžeme dívať už len skrz sklíčka dotykov. Nezúfajte však, tak ako každý rok, aj teraz prichádza v septembri do mozaiky vášho života chýbajúci dielik vo forme nových zadaní **STROMu**! Zadania sú už tradične ako záživné a napínavé, tak aj náročné, a nám neostáva nič iné, ako vám zaželať, nech stúpate po schodoch poradia aspoň tak dobre ako Rišo.

Navždy vaši **STROMáci**

Košický Matboj

Radi by sme dali do pozornosti, že ďalší ročník skvelej súťaže Košický Matboj sa uskutoční 25. októbra 2019. Pozvánky s presnejšími informáciami budú spolu s inštrukciami k prihlasovaniu rozposlané na školy koncom septembra. V prípade záujmu si na našej stránke <https://seminar.strom.sk/sk/matboj/> už teraz môžete pozrieť pravidlá, zadania a riešenia predchádzajúcich ročníkov. Tešíme sa na Vás na Matboji (:



Šifrovačka Kôš

Zaujímajú vás okrem matematiky aj rozličné hlavolamy, logické úlohy či šifry? Pripadajú vám šifrovačky na sústredkách krátke a ľahké? Nemáte ešte program na 26. októbra? Ste milovníkom plechových nádob na odpadky? Ak ste aspoň na jednu z týchto otázok odpovedali áno, tak sa začnite radovať, pretože pre vás organizujeme dennú šifrovačku Kôš v Košiciach. Od 9:00 do 17:00 si budete mať možnosť zmerať sily s ostatnými tímami, ale najmä s 10 šiframi. Šifrovačka je rozdelená do dvoch kategórií, takže si na svoje prídu úplní začiatočníci aj profíci. Zožňte si najviac 5-členný tím a prídte sa zabaviť na Kôš. Viac informácií a registráciu nájdete na bit.ly/sifrovackakos a FB udalosť na bit.ly/sifrovackakosfb.

Pokyny pre riešiteľov

Seminár je určený pre žiakov prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných a bilingválnych gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci nižších ročníkov; v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci. STROM je súťaž jednotlivcov a riadi sa organizačným poriadkom zaregistrovaným na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2016-9485/41562:71-10E0.

Registrácia

Korešpondenčný matematický seminár STROM je jednou z aktivít národného projektu IT Akadémia - vzdelávanie pre 21. storočie (<https://itakademia.sk>). Pred tým, ako odošleš prvé príklady (poštou, alebo elektronicky), je preto potrebné, aby si sa na túto aktivitu prihlásil.

Ak si sa zapojil do niektorej z našich aktivít v rámci národného projektu, tak už máš konto na portáli <https://registracia.itakademia.sk>. V takomto prípade stačí, ak sa prihlásiš na aktivitu Korešpondenčný matematický seminár STROM na tomto portáli.

Ak ešte nie si registrovaný v projekte, vyplň nám kontaktné údaje v dotazníku, ktorý nájdeš na stránke seminára, a my ti konto vytvoríme.

Registrácia je povinná, ak chceš, aby tvoje riešenia boli opravené. Vďaka tomu, že seminár je jednou z aktivít projektu, sú všetky aktivity v rámci neho pre teba bezplatné, a tak, ak sa budeš snažiť, budeš sa môcť zúčastniť sústredujúceho v Danišovciach bezplatne a pre najlepších troch riešiteľov sú pripravené aj knižné poukážky.

S registráciou nech ti pomôžu rodičia alebo učiteľ v škole. V prípade, že máš ty alebo tvoji rodičia, resp. učitelia akékoľvek otázky k registrácii, neváhajte nás kontaktovať e-mailom na sutaze@itakademia.sk.

Prihlásenie do semestra prebieha online, na našej webovej stránke <http://seminar.strom.sk>. Ak si novým riešiteľom, alebo ešte nemáš vytvorený účet, zaregistruj sa a vyplň povinné údaje v užívateľskom profile – odkaz **Aktualizovať profil** v sekcii **Správa účtu**. Tieto údaje potrebujeme, aby sme sa s Tebou mohli skontaktovať aj v čase, keď nie si v škole (prázdniny, ...), v prípade pozývania na sústredujúce a tiež, aby sme ťa mohli uverejniť v poradí riešiteľov aktuálnej časti seminára. Na tejto stránke nájdeš takisto svoje opravené a obodované riešenia, bez ohľadu na to, ako si ich poslal.

Prihláška (vyplnenie profilu) je **povinná pre všetkých riešiteľov**. Úlohy, ktoré sa nedajú priradiť k užívateľovi s korektno vyplneným profilom, **nebudú opravené**.

Úlohy riešte zásadne samostatne, neodpisujte, v riešeníach vysvetľujte celý svoj myšlienkový postup ako v Matematickej olympiáde. Svoje riešenia môžete poslať poštou alebo cez našu webovú stránku, nie odovzdávať osobne. Pri opravovaní sa držíme zásady, že čo sa nedá prečítať, nemôže byť ohodnotené bodmi. Preto zvážte, či nenapíšete svoje riešenia na počítači. Riešenia poštou zasielajte do uvedeného termínu (rozhoduje dátum poštovej pečiatky) na adresu

PF UPJŠ
STROM
Jesenná 5
041 54 Košice.

Elektronické odovzdávanie je možné do uvedeného termínu cez nový webový portál na stránke <http://seminar.strom.sk>. Súbor s riešením odovzdáte jednoducho po prihlásení do svojho užívateľského účtu - tlačidlo **Odovzdať** pri konkrétnom príklade v sekcii **Príklady**. Úlohy odovzdávajte primárne vo formáte PDF, portál na vaše riziko zvládne aj konverziu z iných formátov ako je JPG, PNG, či DOC (riešenia si po nahraní radšej skontrolujte).

Jedine v prípade technických problémov na našej strane je možné poslať riešenia na e-mailovú adresu riesenia.strom@strom.sk vo formáte PDF (riešenia v inom formáte nebudú akceptované).

Riešenie každej úlohy píše na samostatný papier **formátu A4**, respektíve do samostatného súboru, na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás prostredníctvom komentárom k úlohám na našej stránke, cez e-mail strom@strom.sk alebo osobne.

Bodovanie úloh závisí od kvality riešenia. Za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Body môžete získať aj za čiastočné vyriešenie zadaných úloh. Preto sa nebojte poslať aj svoje neúplné riešenia. Do celkového poradia sa započítavajú body takto:

štvrtáci, október: všetky vyriešené úlohy
tretiaci, septima: všetky vyriešené úlohy
druháci, sexta: päť najlepšie vyriešených úloh plus minimum z týchto piatich úloh
prváci, kvinta a mladší: päť najlepšie vyriešených úloh plus maximum z týchto piatich úloh

Príklad použitia pravidiel:

Štyria bratia, štvrták Vlado, tretiak Fero, druhák Jaro a prvák Marcel, vyriešili všetky úlohy úplne rovnako (zhodou náhod, že) za 3, 2, 4, 1, 5 a 4 body. Vlado potom získal $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$ bodov, Fero tiež získal $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$ bodov, Jaro $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 2 = 20$ bodov a Marcel $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 5 = 23$ bodov. Jasné, nie?

Riešenie založené na využití výpočtovej techniky spravidla nebude ohodnotené vysokým počtom bodov.

Hodnotené budú len tie časti riešenia, ktorých správnosť je možné overiť v primeranom čase.

Riešenia po termíne

V prípade, že svoje riešenie pošleš po termíne odovzdania, riešenie ti opravíme len v prípade, že nám bude doručené do štyroch dní od termínu série. V tomto prípade ti za oneskorenie strhneme body. Body sa strhávajú nasledovne, podľa dĺžky omeškania:

- do 24 h: 2/3 bodov zaokrúhlené nahor
- viac ako 24h a do štyroch dní: 1/2 bodov zaokrúhlené nahor
- viac ako štyri dni: riešenie neopravujeme

Vo výnimočných prípadoch môžeme body za riešenie neznížiť.

Varovania (!!!). Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú za odpisovanie a za poslanie riešení po termíne. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdete úlohu riešenú v literatúre, uveďte názov, autora a stranu, inak riskujete stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie). V prípade, že nie ste spokojní s bodovým ohodnotením vášho riešenia, môžete nám do dvoch týždňov od opravenia riešení zaslať e-mailom sťažnosť a tá bude prešetrená.

Sústredenie je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Zúčastňujú sa ho riešitelia korešpondenčných sérií na základe poradia po korešpondenčných sériách danej časti ročníka. Sústredenie je určené najmä pre študentov stredných škôl (a im príslušných ročníkov na osemročnom gymnáziu), mladší žiaci (tí, ktorí počas sústredenia nie sú stredoškôlkami) sú pozvaní ako náhradníci. Ďalší účastníci a náhradníci sú pozývaní podľa poradia **STROMu**, nie však tí riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou.

Zadania úloh zimného semestra 44. ročníka

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na <https://seminar.strom.sk>.

1 Prvá séria

Termín odoslania riešení: **28. 10. 2019**

1. Baník sa nachádza na kocke. Každú minútu sa rozhodne, či prejde do niektorého vrcholu, ktorý susedí hranou s vrcholom, kde sa práve nachádza, alebo sa prevrta do vrcholu, ktorý je presne oproti. Baník sa vždy rozhodne náhodne s rovnakou pravdepodobnosťou pre každú voľbu nasledujúceho vrcholu. Aká je pravdepodobnosť, že sa po 2019 minútach bude nachádzať vo vrchole, ktorý je presne oproti počiatočnému vrcholu?

2. Dokážte, že pre všetky $x \in \mathbb{R}$, pre všetky celé kladné n a pre ľubovoľné rozdelenie znamienok $+$ a $-$ vo výrazoch \pm platí

$$x^{2n} \pm x^{2n-1} \pm x^{2n-2} \pm x^{2n-3} \pm x^{2n-4} \pm \dots \pm x + 1 > \frac{1}{2}.$$

3. Majme deku s rozmermi 3×3 metre ofarbenú tromi farbami. Ukážte, že vieme zapichnúť dvojzubec do deky tak, že hroty dvojzubca prepichnú deku na miestach s rovnakou farbou. Predpokladáme, že hrot je jeden bod a že vzdialenosť hrotov dvojzubca je 1cm .

4. Dokážte, že ak a, b sú korene polynómu $x^2 - 8x + 1$, tak potom pre všetky nezáporné celé čísla n platí, že $a^n + b^n$ je celé číslo nedeliteľné siedmimi.

5. Daná je úsečka PQ a kružnica k . Body A a B sa hýbu po kružnici k tak, aby vždy platilo $|AB| = |PQ|$. Ak označíme T priesečník osí úsečiek AP a BQ , potom každá poloha tetivy AB určuje polohu bodu T . Dokážte, že všetky možné body T ležia na jednej priamke.

6. Každý bod v rovine s celočíselnými súradnicami je ofarbený buď červenou alebo modrou farbou tak, aby boli splnené podmienky:

1. Na úsečke spájajúcej červené body neleží žiaden modrý bod.

2. Ak majú dva modré body vzdialenosť 2, potom bod uprostred medzi nimi je modrý.

Dokážte, že z ľubovoľného červeného bodu sa vieme dostať do ľubovoľného iného tak, že nemusíme prejsť cez žiaden modrý bod, pričom kroky vieme robiť len vodorovne a zvislo, vždy o vzdialenosť jedna.

2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **2. 12. 2019**

1. Určte, pre ktoré kladné celé čísla n existuje tabuľka $n \times n$ obsahujúca n^2 kladných celých čísel, pre ktorú platí, že pre ľubovoľnú voľbu i a j (môžu nadobúdať hodnoty od 1 po n) je v políčku v i -tom riadku a j -tom stĺpci počet všetkých hodnôt j , ktoré sa vyskytujú v i -tom stĺpci.
2. Mihál nemá rád čísla s prívlastkom. Má však rád také kladné celé čísla m , pre ktoré je každé z čísel m , $m + 1$, $m + 2$ a $m + 3$ deliteľné svojim ciferným súčtom. Dokážte, že ak posledná cifra v takomto čísle je 8, tak potom predposledná cifra tohto čísla je nutne 9.
3. Majme štvorec $ABCD$, ktorý má nad stranou AB zostrojenú polkružnicu vo vnútri štvorca $ABCD$. K tejto polkružnici vedme dotyčnicu prechádzajúcu bodom C rôznu od priamky CB a označme jej bod dotyku F . Prienik úsečky BD a polkružnice označme E . Aký je obsah trojuholníka BEF , ak je dĺžka strany štvorca $ABCD$ rovná 10?
4. V odľahlej časti mesta stojí niekoľko rovnakých veží s kruhovým pôdorysom. Vandali sa rozhodujú, kde budú sprejovať, pričom na mape si vyznačia bod na obode veže práve vtedy, keď z daného miesta nevidno žiadnu inú vežu. Dokážte, že celková dĺžka vyznačených oblastí je rovná obvodu jednej veže.
5. Dvaja hráči hrajú piškvorcky na nekonečne veľkom trojuholníkovom papieri a striedajú sa v ťahoch. Ten, kto je na ťahu, vždy nakreslí svoju značku do niektorého voľného políčka. Vyhrá hráč, ktorý má ako prvý neprerušovanú rovnú radu (smerujúcu jedným z troch možných smerov v mriežke) aspoň n svojich znakov, kde n je nejaké prirodzené číslo. V závislosti na n určte, kto má vyhrávajúcu alebo neprehrávajúcu stratégiu.
6. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí: $f(xy + f(x)) = xf(y)$.

Mohlo by sa hodiť

Geometria

Veta o obvodovom a stredovom uhle: Majme oblúk AB na kružnici so stredom S . Uhol ASB sa nazýva stredový uhol k oblúku (nad tetivou) AB . Nech X je ľubovoľný bod na dlhšom oblúku AB , potom uhol AXB sa nazýva obvodový k oblúku (nad tetivou) AB a jeho veľkosť je rovnaká pre každú polohu bodu X , a to polovica veľkosti príslušného stredového uhla.

Tetivový štvoruholník: Tetivový štvoruholník je taký, ktorému sa dá opísať kružnica. Štvoruholník je tetivový práve vtedy, keď je súčet veľkostí jeho protilahlých vnútorných uhlov 180° .

Matematická indukcia

Ak sa snažíme niečo dokázať pre všetky prirodzené čísla počnúc niektorým, stačí nám ukázať platnosť nášho tvrdenia pre toto počiatkové číslo a potom ukázať platnosť tvrdenia: „ak naše tvrdenie platí pre číslo n , potom platí aj pre číslo $n + 1$.“ Základná myšlienka takéhoto dôkazu sa často ukazuje na domine. Niekedy sa tieto kvádre stavajú do dlhého radu tak, aby každý pri svojom páde so sebou stiahol na zem aj svojho bezprostredného suseda. Potom na to, aby spadli všetky kocky, postačí zhodenie prvej z nich. Inak povedané, ak vieme, že n . kocka zapríčini pád $(n + 1)$., stačí nám zapríčiniť pád 1. kocky radu.

Dirichletov princíp

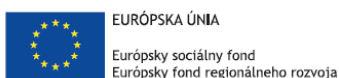
Majme n predmetov a m priehradok. Chceme poukladať predmety do priehradok tak, aby každý predmet bol v práve jednej priehradke. Dirichletov princíp je jednoduché tvrdenie, že ak je $n > m$ (predmetov viac ako priehradok), tak potom v aspoň jednej priehradke budú aspoň dva predmety (v silnejšej verzii vieme tvrdiť, že pri n priehradkach a aspoň $kn + 1$ predmetoch (pre prirodzené k) existuje priehradka s $k + 1$ predmetmi).

Polynómy

Polynóm alebo aj mnohočlen stupňa n je výraz v tvare $P(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, kde a_i sú dané konštanty a x je premenná. Číslo t sa nazýva koreňom polynómu P , ak platí, že $P(t) = 0$, teda polynóm má v tomto bode hodnotu nula. V takom prípade výraz $(x - t)$ delí celý polynóm P , čiže platí $P(x) = (x - t) \cdot Q(x)$, kde Q je polynóm stupňa $n - 1$.

Názov	STROM – korešpondenčný matematický seminár Číslo 1 • September 2018 • Zimný semester 44. ročníka (2019/2020)
Internet:	http://seminar.strom.sk
E-mail:	strom@strom.sk
Vydáva:	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet:	https://zdruzenie.strom.sk
E-mail:	info@strom.sk

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.



Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje