



## Čaute Stromáci!

Kde bolo, tam bolo, a kde nebolo, tam nebolo. No tam, kde bolo, tam určite bolo. A bolo tam niečo, čo tam bolo, pretože ak by tam nič nebolo, tak by to tam nebolo. A teda kde bolo, tam bolo a bolo tam naozaj. A naozaj tam bolo, to čo tam bolo, pretože to tam bolo. A čo tam vlastne bolo, keď to tam bolo? Tak poďme pekne po poriadku! Kde bolo, tam bolo, tam, kde naozaj niečo bolo, bol raz jeden Strom. Presne tak sa ten príbeh začal, presne tak, ako všetky ostatné. A tam, kde bol Strom, tam boli aj Stromisti, ktorí pripravili novú sériu, aj riešitelia, ktorí sa ju budú snažiť vyriešiť, a aj príklady, ktoré je potrebné vyrátať. A ako ten príbeh dopadne? Ako to všetko nakoniec skončí? Podarí sa riešiteľom rozlúsknuť všetky úlohy? To je len a len na Vás! Tak hor sa do rátania!

Vaši **STROM**isti

## Čo je seminár STROM?

Seminár **STROM** (Súťaž Talentovaných Riešiteľov Oblubujúcich Matematiku), organizovaný Združením STROM, je pokračovateľom najstaršej súťaže svojho druhu v bývalom Česko-Slovensku, ktorá vznikla pod názvom Korešpondenčný matematický seminár v roku 1976 v Košiciach. Tento seminár je *bezplatný* a je určený najmä pre žiakov stredných škôl, no zapojiť sa môžu aj mladší. Každý školský rok čakajú na riešiteľov dva semestre, v ktorých dostanú zadania dvoch sérií príkladov.

Tí najlepší riešitelia sa potom dostanú na týždňové sústredenie a zažijú veľa zábavy. Sústredenia na konci semestrov majú byť pre žiakov odmenou a zároveň motiváciou pre pokračovanie a zlepšovanie sa v riešení matematických seminárov.

Samotná korešpondenčná časť je v priebehu roka doplňovaná rôznymi akciami. Každoročne organizujeme Matboj, matematickú súťaž pre družstvá, ale aj zábavné hry, výlety alebo športové stretnutia. Naším cieľom je ukázať žiakom krásu matematiky, niekedy aj netradičným a hravým spôsobom. Preto dúfame, že náš seminár a s ním spojené akcie si nájdu svojich stálych nadšencov v radoch žiakov, ale aj podporovateľov v radoch učiteľov.

## Matematický krúžok

Aj v druhom polroku školského roku 2014/2015 sa na **Prírodovedeckej fakulte UPJŠ** v Košiciach na Jesennej 5 koná každý týždeň vo štvrtok od 15.00 matematický krúžok, ktorý je zameraný hlavne na prípravu na krajské kolo Matematickej olympiády v kategóriách B a C, ale i na prípravu tých, čo postúpili na celoštátne kolo Matematickej olympiády kategórie A. Po skončení týchto kôl, od apríla 2015, bude krúžok zameraný na riešenie olympiádnych úloh, ktoré budú vhodnou prípravou pred ďalším ročníkom Matematickej olympiády. Krúžku sa môže zúčastniť ktorýkoľvek stredoškôlak (ale i šikovný základnoškôlak), ktorý sa chce venovať Matematickej olympiáde.

## 2% z daní

Aj tento rok môžu vaši rodičia venovať 2% zo svojich daní verejno-prospešným organizáciám, ako sme my (dokonca niektorí až 3%).

Peniaze získané z 2% v **STROME** využívame na pokrytie časti nákladov spojených s aktivitami pre vás (kopírovanie časopisov, poštovné, ceny na súťažiach, aktivity na sústrediach, ...).

Chceme vás preto poprosiť, aby ste rodičom, členom svojej blízkej aj vzdialenej rodiny, susedom a kľudne aj cudzím ľuďom na ulici porozprávali o našich aktivitách a poprosili ich, aby svojou troškou podporili našu dobrovoľnícku činnosť a pomohli tým skupine mladých cielavedomých ľudí zabezpečujúcich chod týchto úžasných seminárov, ktoré tak zbožňujete. Porozprávajte im, čo pre vás znamená sústredenie, čo vám dáva riešenie úloh semináru a vysvetlite im, že takto podporia aj váš rozvoj a prispievajú k zmysluplnému tráveniu vášho voľného času.

Potrebné informácie o tom, ako darovať 2% z daní, nájdete na stránke <https://seminar.strom.sk/sk/zdruzenie/2percenta/> a radi vám zodpovieme na ľubovoľné otázky ohľadom našej podpory aj mailom na [info@strom.sk](mailto:info@strom.sk). Ďakujeme!

## Pokyny pre riešiteľov

**Seminár** je určený pre žiakov prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných a bilingválnych gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci nižších ročníkov; v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci. STROM je súťaž jednotlivcov.

**Prihlásenie do semestra** prebieha online, na našej webovej stránke <http://seminar.strom.sk>. Ak si novým riešiteľom, alebo ešte nemáš vytvorený účet, zaregistruj sa a vyplň povinné údaje v užívateľskom profile - odkaz **Aktualizovať profil** v sekcii **Správa účtu**. Tieto údaje potrebujeme, aby sme sa s Tebou mohli skontaktovať aj v čase, keď nie si v škole (prázdniny...), v prípade pozývania na sústredenie a tiež aby sme ťa mohli uverejniť v poradí riešiteľov aktuálnej časti semináru. Na tejto stránke nájdeš takisto svoje opravené a obodované riešenia, bez ohľadu na to, ako si ich poslal. Prihláška (vyplnenie profilu) je **povinná pre všetkých riešiteľov**. Úlohy, ktoré sa nedajú priradiť k užívateľovi s korektne vyplneným profilom, **nebudú opravené**.

**Úlohy** riešte zásadne samostatne, neodpisujte, v riešeníach vysvetľujte celý svoj myšlienkový postup ako v Matematickej olympiáde. Svoje riešenia môžete poslať poštou alebo cez našu webovú stránku, nie odovzdávať osobne. Pri opravovaní sa držíme zásady, že čo sa nedá prečítať, nemôže byť ohodnotený bodmi. Preto zväzťe, či nenapíšete svoje riešenia na počítači. Riešenia poštou zasielajte do uvedeného termínu (rozhoduje dátum poštovej pečiatky) na adresu

PF UPJŠ  
**STROM**  
Jesenná 5  
041 54 Košice.

**Elektronické odovzdávanie** je možné do uvedeného termínu cez nový webový portál na stránke [seminar.strom.sk](http://seminar.strom.sk). Súbor s riešením odovzdáte jednoducho po prihlásení do svojho užívateľského účtu - tlačidlo **Odovzdať** pri konkrétnom príklade v sekcii **Príklady**. Úlohy odovzdávajte primárne vo formáte PDF, portál na vaše riziko zvládne aj konverziu z iných formátov ako je JPG, PNG, či DOC.

V prípade technických problémov na našej strane posielajte na e-mailovú adresu [riesenia@strom.sk](mailto:riesenia@strom.sk) vo formáte PDF.

**Riešenie** každej úlohy píšete na samostatný papier **formátu A4**, respektíve do samostatného súboru, na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás prostredníctvom komentárom k úlohám na našej stránke, cez e-mail [strom@strom.sk](mailto:strom@strom.sk) alebo osobne.

**Bodovanie** úloh závisí od kvality riešenia. Za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Body môžete získať aj za čiastočné vyriešenie zadaných úloh. Preto sa nebojte poslať aj svoje neúplné riešenia. Do celkového poradia sa započítavajú body takto:

- štvrtáci, oktáva:** všetky vyriešené úlohy
- tretiaci, septíma:** všetky vyriešené úlohy
- druháci, sexta:** päť najlepšie vyriešených úloh plus minimum z týchto piatich úloh
- prváci, kvinta a mladší:** päť najlepšie vyriešených úloh plus maximum z týchto piatich úloh

### Príklad použitia pravidiel:

Štyria bratia, štvrták Vlado, tretiak Fero, druhák Jaro a prvák Marcel, vyriešili všetky úlohy úplne rovnako (zhodou náhod, že) za 3, 2, 4, 1, 5 a 4 body. Vlado potom získal  $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$  bodov, Fero tiež získal  $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$  bodov, Jaro  $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 2 = 20$  bodov a Marcel  $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 5 = 23$  bodov. Jasné, nie?

**Varovania (!!!)**. Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú za odpisovanie a za poslanie riešení po termíne. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdete úlohu riešenú v literatúre, uveďte názov, autora a stranu, inak riskujete stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie). V prípade, že nie ste spokojní s bodovým ohodnotením vášho riešenia, môžete nám do dvoch týždňov od rozoslania riešení zaslať poštou sťažnosť a tá bude prešetrená.

**Sústredenie** je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Zúčastnia sa ho najlepší riešitelia podľa záverečného poradia a členovia minimálne prvých troch najlepších družstiev z matboja, ak sa v príslušnom polroku koná. Prípadní ďalší účastníci a náhradníci sú pozývaní podľa poradia **STROMu** a matboja; nie však tí riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou.

## Zadania úloh letného semestra 39. ročníka

# 1 Prvá séria

Termín odoslania riešení: **30. 3. 2015**

1. Matúš si vymyslel 4 kladné, nie nutne celé čísla  $a, b, c$  a  $d$ . Má teda 6 možností, ako vynásobiť práve 2 z nich. Peťovi ale Matúš povedal len 5 z týchto 6 súčinov, konkrétne 2, 3, 4, 5 a 6. Pomôžte Peťovi nájsť šiesty súčin.
2. Blcha skáče po mrežových bodoch štvorcovej siete. Každým skokom sa dostane o 1 mrežový bod vyššie, nižšie, doprava alebo doľava. Začne skákať z bodu  $[0, 0]$ . Do koľkých mrežových bodov sa môže dostať presne po 15 skokoch?
3. Dokážte že súčet  $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$  je iracionálne číslo.
4. Dokážte, že pre všetky  $n$  sa dajú prirodzené čísla od 1 až po  $n$  usporiadať tak, aby sa medzi žiadnymi dvoma z nich nenachádzal ich priemer. Napríklad 6, 1, 4, 5, 3, 2 nie je dobré zoradenie čísel od 1 po 6, lebo medzi 2 a 6 sa nachádza ich priemer 4.
5. Na šachovom turnaji sa zúčastnilo  $n$  šachistov: veľmajstri a majstri. Po skončení turnaja, na ktorom hral každý s každým, sa ukázalo, že každý účastník získal presne polovicu svojich výhier v partiách proti majstrom. Ukážte, že  $\sqrt{n}$  je celé číslo, ak viete, že žiaden zo zápasov neskončil remízou.
6. Majme trojuholník  $ABC$ , nech  $A_1, B_1, C_1$  sú stredmi lomených čiar  $CAB, ABC, BCA$  (sú v polovici ich dĺžok). Nech  $p, q, r$  sú priamky vedúce cez  $A_1, B_1, C_1$  a rovnobežné s osami vnútorných uhlov trojuholníka  $ABC$  pri vrcholoch  $A, B, C$ . Dokážte, že  $p, q$  a  $r$  sa pretínajú v jednom spoločnom bode.

# 2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **27. 4. 2015**

1. Robčo našiel prirodzené čísla  $a, b, c$  také, že platí  $a^2 = 2b^3 = 3c^5$ . Zistite najmenšiu možnú hodnotu súčinu  $abc$ .
2. Koľko existuje 5-ciferných čísel tvaru  $\overline{ABCDE}$ , pre ktoré platí, že
  - a)  $A > B > C > D > E$ ?
  - b)  $A \geq B \geq C \geq D \geq E$ ?
3. V rovnoramennom trojuholníku  $ABC$  so základňou  $BC$  pretína os uhla pri  $B$  stranu  $AC$  v bode  $D$ . Vieme, že platí  $|BC| = |BD| + |AD|$ . Určte veľkosť uhla pri vrchole  $A$ .
4. Nech  $x$  a  $y$  sú kladné reálne čísla spĺňajúce  $y^3 + y \leq x - x^3$ . Dokážte, že potom platí  $y < x < 1$  a  $x^2 + y^2 < 1$ .
5. Čísla  $1, 2, \dots, n^2$  sú zapísané do štvorcovej tabuľky  $n \times n$  tak, že čísla v každom riadku (zľava doprava) a v každom stĺpci (zhora dole) sú v rastúcom poradí. Označme  $a_{jk}$  číslo zapísané v  $j$ -tom riadku a  $k$ -tom stĺpci. Nech  $b_j$  je počet rôznych čísel, ktoré sa môžu objaviť v tabuľke na mieste  $a_{jj}$ . Dokážte, že

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq \frac{n}{3}(n^2 - 3n + 5).$$

(Napríklad pre  $n = 3$  jedinú čísla, ktoré sa môžu v tabuľke objaviť ako  $a_{22}$  sú 4,5,6, takže  $b_2 = 3$ .)

6. Dokážte, že existuje taká nekonečná rastúca postupnosť prirodzených čísel  $a_1, a_2, \dots$ , že pre každé celé  $k \geq 0$ , postupnosť  $a_1 + k, a_2 + k, a_3 + k, \dots$  obsahuje len konečne veľa prvočísel.

## O zimnom sústredení

Od 15.2. do 20.2. mali riešitelia STROMu možnosť zúčastniť sa zachraňovania planéty. Sprvu to síce vyzeralo ako týždeň plný vyššej psychológie, všetko sa však zmenilo s príchodom vesmírnych údržbárov, ktorí trvali na tom, že Zem je potrebné reštartovať spôsobom, ktorý je nemožné prežiť. Našťastie nás navštívil aj bájnny medzihviezdny cestovateľ Adam, z ktorého sa vykľul praotec života na modrej planéte. S pomocou jeho prístroja na prezeranie spomienok bolo možné sledovať zrodenia a pády silných civilizácií, po ktorých sa nám zachovali tajomné artefakty.

Civilizácia tvorená výlučne mužmi obľubujúcimi futbal nás naučila, že predom vyhratá hra sa ani neoplatí začínať. Tá, kde ženy dokázali ovládať mysle ostatných pohlaví, zase poučila o tom, že základné túžby sa nedajú potlačiť. Svet, v ktorom sa ľudia rozhodli uložiť svoje vedomia na spoločný disk, upozornil na nebezpečia prehnanej optimalizácie, doba plná drakov ukázala, že po zlyhaní je ťažké získať si niekdajšiu dôveru. Posledné tri preskúmané artefakty ukázali doby, kde sa ľudstvo v snahe posunúť ďalej nedožilo lepšieho zajtrajška. Objavenie večnej bdelosti, vynález urýchľovania času, vytvorenie univerzálneho písma, to všetko viedlo k zániku.

Poučení od predkov sa nakoniec účastníci pozreli do spomienok samotných údržbárov. Zistilo sa, že bez reštartu zanikne celý vesmír. Okrem toho sa ale prišlo aj na to, že neprežiteľným pre nás nie je samotný reštart, ale jeho vedľajší produkt - radiácia typu A, B, C a D. Spolu s artefaktmi sa však podarilo radiáciu priebežne udržať pod kontrolou, a tak bolo všetko v poriadku.

Ktovie, aké dobrodružstvo čaká našich riešiteľov nabudúce. Ak chceš byť pritom, tak rátaj s nami ;)

Za podporu a spoluprácu ďakujeme



Projekt podporila Nadácia pre deti Slovenska z fondu Hodina deťom

<b>Názov</b>	<b>STROM</b> – korešpondenčný matematický seminár Číslo 4 • Marec 2015 • Letný semester 39. ročníka (2014/2015)
<b>Internet:</b>	<a href="http://seminar.strom.sk">http://seminar.strom.sk</a>
<b>E-mail:</b>	<a href="mailto:strom@strom.sk">strom@strom.sk</a>
<b>Vydáva:</b>	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
<b>Internet:</b>	<a href="http://www.strom.sk">http://www.strom.sk</a>
<b>E-mail:</b>	<a href="mailto:zdruzenie@strom.sk">zdruzenie@strom.sk</a>