STROM

Korešpondenčný matematický seminár

Boli ste dobrí? Tak to vám Mikuláš určite nadelil plnú topánku sladkostí. Boli ste však aj šikovní a poctivo ste rátali príklady Stromu? Tak to sme s odmeňovaním teda na rade my. Vo výsledkovej listine si za svoje potrápené hlavičky, preškrtané papiere a hlavne finálne riešenia nájdete body a možno aj nejaké hlasy navyše. Prajeme vám krásne sviatky, užite si zdobenie jedličky (hľadanie zapatrošeného umelého vianočného stromčeka), chytanie kapra (hon na posledné rybie filé v Tescu) či pečenie medovníčkov (vyjedanie koláčov priamo z plechu).

Vaši **STROM**isti

Maxiklub

Chceš sa schovať pred zimou, či pokecať s niekým o neodolateľnej vôni medovníkov zo špajze? Príď na vianočný Maxiklub, ktorý sa bude konať v nedeľu 21.12.2014 od 15:00 na Jesennej 5 v Košiciach, miestnosť P19. Nájdeš tam kopu svojich kamarátov a vedúcich a samozrejme dobrú náladu. Budú ťa čakať aj nejaké tie dobroty a možno aj kapustnica. Vstupné na túto lukratívnu udalosť je zopár vianočných koláčikov, ktoré ukradneš z domácej zásoby na zimu. Pravdepodobne ťa pustíme k nám aj keď na to zabudneš, ale za isté to považovať nemôžeš :-P. Okrem toho si so sebou nezabudni zobrať všetky nové historky či dobré vtipy :-).

Tešíme sa na teba!

Sústredenie pred krajským kolom MO

Aj tento rok Krajská komisia MO v Košiciach organizuje prípravu pred krajským kolom Matematickej olympiády, kategórie A. Sústredenie sa uskutoční 8. a 9. januára 2015 tento krát v Košiciach na pôde Prírodovedeckej fakulty UPJŠ na Jesennej 5. Jeho náplňou, ako je už zvykom, bude simulované riešenie krajského kola doplnené o vysvetľovanie riešení tohto simulovaného kola obohatené o ďalšie úlohy. Viac informácií nájdeš na stránke *http://umv.science.upjs.sk/mo* alebo ak napíšeš mail na *hajduk@strom.sk*.

Riešenia 2. série úloh Zimného semestra 39. ročníka

1.

Opravoval: Matúš Hlaváčik
Počet riešiteľov: 50

Ukážte, že pre všetky prirodzené čísla a, b, c, d platí, že $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(d-c)$ je deliteľné 12.

Riešenie:

Ak má byť súčin deliteľný 12, vieme, že musí byť deliteľný 4 a zároveň 3.

Najprv rozoberme deliteľnosť 3:
Máme štyri prirodzené čísla a tri rôzne zvyšky, ktoré čísla môžu dávať po delení 3 (0, 1 a 2). Z Dirichletovho princípu vidíme, že aspoň dve z týchto štyroch čísel musia mať rovnaký zvyšok. To znamená, že ich rozdiel bude deliteľný 3. Teraz vieme, že aspoň jedna zo zátvoriek (jeden z rozdielov) je deliteľná 3, a teda 3 bude deliť aj celý súčin.

Pozrime sa na deliteľnosť 4:
Existujú štyri rôzne zvyšky po delení 4: 0, 1, 2 a 3. Máme dve možnosti:

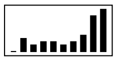
1. Všetky čísla dávajú rôzne zvyšky po delení 4. Potom ak odrátam od seba čísla so zvyškami rovnakej parity $((4k+3)-(4l+1)$ a $(4m+2)-(4n+0))$, tak dostaneme dve čísla deliteľné 2 $((4k+3)-(4l+1)=4k-4l+2=2\cdot(2k-2l-1)$ a $(4m+2)-(4n+0)=2\cdot(2m-2n+1))$. To znamená, že v súčine sa nachádzajú dve rôzne zátvorky (rozdiely), ktoré sú deliteľné 2, a teda celý súčin bude deliteľný 4.

2. Aspoň dve čísla dávajú rovnaký zvyšok po delení 4. Z toho vieme, že rozdiel týchto dvoch čísel bude deliteľný 4, čo znamená, že celý súčin je deliteľný 4.

Dokázali sme, že súčin je vždy deliteľný 3 aj 4, a teda je deliteľný 12.

Komentár: Úlohu ste zväčša riešili správne, avšak niektorí z vás zabudli zdôvodniť nejaké drobnosti alebo prehlasovali niečo, čo bola síce pravda, ale nebolo vôbec zrejmé, ako na to prišli. Tým som musel strhnúť viac bodov. Často ste sa napríklad snažili použiť Dirichletov princíp, ale vôbec ste nenapísali ako ho používate (čo sú vaše holubníky a čo holuby).

2. **Opravovala: Janka Baranová**
Počet riešiteľov: 46



Majme postupnosť čísel, pre ktorú platí $a_2=5$ a $a_n=\left\lfloor\frac{n^2}{a_{n-1}}\right\rfloor$ pre $n>2$. Zistite hodnotu a_{999} a svoje riešenie odôvodnite.

Riešenie:

Najlepšie na začiatok je vypísať si prvých pár členov, aby sme zistili ako približne sa naša postupnosť správa:

$$\begin{aligned} a_3 &= \left\lfloor\frac{9}{5}\right\rfloor = 1 \\ a_4 &= \left\lfloor\frac{16}{1}\right\rfloor = 16 = 4^2 \\ a_5 &= \left\lfloor\frac{25}{16}\right\rfloor = 1 \\ a_6 &= \left\lfloor\frac{36}{1}\right\rfloor = 36 = 6^2 \end{aligned}$$

Môžeme pozorovať, že pri nepárnom člene postupnosti (teda aj pri 999. člene) je hodnota a_n rovná 1 a pri párnom je to n^2. Toto tvrdenie však musíme korektne dokázať.

Odtiaľ ste sa vydávali 2 spôsobmi – prvý bol založený na matematickej indukcii (dokazovali ste to cez párne a nepárne členy zvlášť), druhý si ukážeme tu a teraz.

Vidíme, že $a_3=1$. Čo ak teda všeobecne nejaké $a_k=1$? Potom nasledujúci člen bude vyzerať takto:

$$a_{k+1}=\left\lfloor\frac{(k+1)^2}{a_k}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{(k+1)^2}{1}\right\rfloor=(k+1)^2.$$

Preto vždy po čísle 1, bude nasledovať $(k+1)^2$. Čo bude nasledovať po ňom?

$$a_{k+2}=\left\lfloor\frac{(k+2)^2}{a_{k+1}}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{(k+2)^2}{(k+1)^2}\right\rfloor$$

Ostáva zistiť, aká je hodnota tejto dolnej celej časti:

$$\left\lfloor\frac{(k+2)^2}{(k+1)^2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{(k^2+4k+4)}{(k+1)^2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{((k+1)^2+2k+3)}{(k+1)^2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{(k+1)^2}{(k+1)^2}+\frac{2k+3}{(k+1)^2}\right\rfloor=\left\lfloor 1+\frac{2k+3}{(k+1)^2}\right\rfloor.$$

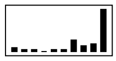
Z čoho je vidieť, že dolná celá časť je 1, pretože zlomok je z intervalu $(0,1)$ pre $k\geq 2$, keďže $2k+3<(k+1)^2$ (čo hneď vidno z roznásobenia $2k+3<k^2+2k+1$, teda $2<k^2$).

Teda sme ukázali, že sa nám striedajú hodnoty 1 (pri nepárnych členoch a_n) a n^2 (pri párnych členoch a_n). Keďže číslo 999 je nepárne, tak $a_{999}=1$.

Komentár: Väčšina z vás došla ako k pozorovanému tvrdeniu, tak aj k správnemu výsledku. Niektorí ste však mali menšie (iní trochu väčšie) problémy s odôvodnením, prečo to tak naozaj je. Je potrebné, aby aj jasné veci boli v riešení aspoň zmienené, aby sme vedeli, že ste o nich uvažovali (konkr. išlo hlavne o „dôkaz“, prečo pri nepárnych členoch dolná celá časť nemôže byť menšia ako 1). Po jednom bode som strhávala aj za preklepy a tým spôsobené malé chybičky pri riešení (dávajte si na to nabudúce pozor, bolo ich naozaj dosť). Nakoniec poučenie do budúcna pre tých, ktorí sa k správnemu výsledku nedopracovali – stále to bolo spôsobené tým, že ste odignorovali znak dolnej celej časti v zadaní. Treba na to dávať pozor, a ak neviete, čo presne zadanie popisuje, treba sa nás na to opýtať.

3. Opravoval: Richard Trembecký

Počet riešiteľov: 41

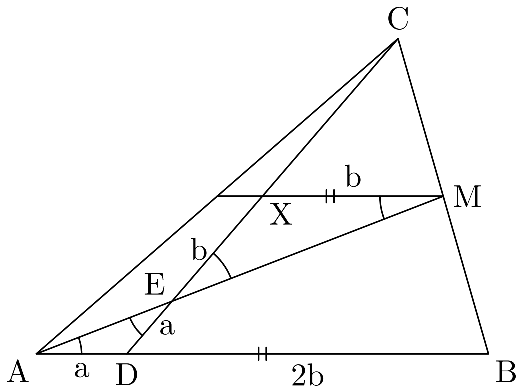


V trojuholníku ABC označme M ako stred strany BC a D vnútorný bod strany AB. Priesečník AM a CD nazveme E. Ukážte, že ak $|AD| = |DE|$, potom $|AB| = |CE|$.

Riešenie:

Spôsobov, ako úlohu riešiť, ste objavili mnoho, my si teraz ukážeme jedno z tých, kde toho bolo potrebné dokresľovať čo najmenej.

Urobme rovnobežku so stranou AB prechádzajúcu bodom M a označíme X prienik našej rovnobežky a úsečky CD. Keďže M je stredom strany BC a $XM||DB$, tak XM je jasne strednou priečkou v trojuholníku CDB, a teda X je stredom úsečky CD. Preto $|CX| = |XD|$.



Označme b veľkosť našej strednej priečky XM. Keďže stredná priečka má polovičnú veľkosť oproti prislúchajúcej strane, platí $|DB| = 2b$.

Označme α veľkosť uhla DAE a a veľkosť úsečky AD. Keďže $|AD| = |DE| = a$ (zo zadania), tak trojuholník ADE je rovnoramenný, preto platí $|\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle DEA| = \alpha$. Uhol XEM je vrcholový k uhlu DEA a uhol EMX je striedavý k uhlu DAE (rovnobežky AD a XM, priečka AM), preto platí takisto $|\sphericalangle XEM| = |\sphericalangle EMX| = \alpha$. Keďže uhly pri základni EM v trojuholníku EMX sú rovnako veľké, tak platí $|XE| = |XM| = b$.

Teraz máme vyjadrené už všetko potrebné, len to poskladať:

$$|CE| = |CX| + |XE| = |XD| + b = |XE| + |DE| + b = b + a + b = a + 2b,$$

$$|AB| = |AD| + |DB| = a + 2b.$$

Naše úsečky majú teda rovnakú veľkosť.

Komentár: Mnoho z vás zvolilo riešenie dokreslením do rovnobežníka. Nedali ste si ale pozor na to, že ste brali za samozrejmosť, že body E a M ležia na uhlopriečke rovnobežníka. To ale bolo treba odôvodniť faktom zo zadania, že bod M leží v strede úsečky BC (druhej uhlopriečky), a keďže sa uhlopriečky rovnobežníka rozpoľujú... Bez ukázania tohto tvrdenia sa nedalo s istotou baviť o veľa uhloch a padal na tom dôkaz. Rád by som poukázal aj na nedostatočné zdôvodňovanie rovnosti uhlov, veľa vecí už beriete za samozrejmosť, ale slová ako „vrcholové“, „striedavé“ a „pri základni rovnorammeného trojuholníka“ by sa stále mali vo vašich riešeniach vyskytovať. Ozaj, ešte malá rada: Pri čítaní vzorákov sa skúste zamyslieť ako vyzerajú. Je tam všetko potrebné, stručne povedané a dobre vystihnutá podstata. Premyslite si aj vy pred písaním podstatu vášho riešenia a ako ho stručne napísať a možno vaše riešenie bude o polovicu kratšie (budete so sebou spokojní a nám sa bude potom lepšie čítať).

4. Opravoval: Peťo Milošovič

Počet riešiteľov: 43

Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí

$$n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

Riešenie:

Asi nikoho neprekvapí, že úlohu nebudeme dokazovať celú naraz. Pozrime sa najprv na pravú časť:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n} \tag{1}$$

Vidíme písmeno n a v každom skúsenejšom matematikovi by sa malo ozvať nutkanie použiť matematickú indukciu. Pre $n = 1$ z (1) dostávame $1 \geq 1$. Naším indukčným predpokladom bude (1). Ako bude vyzerať (1) pre $n = k + 1$, kde k je prirodzené číslo?

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \stackrel{?}{\geq} \sqrt{k+1}$$

Využitím indukčného predpokladu (1) dostaneme:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \overset{?}{\geq} \sqrt{k+1} \tag{2}$$

O vzťahu napravo ešte nevieme či platí. Vynásobme preto obe strany nerovnosti výrazom $\sqrt{k+1}$, ktorý je určite kladný. Dostaneme: $\sqrt{k}\sqrt{k+1}+1 \geq k+1$. Od oboch strán odrátajme 1 a následne ich umocnime na druhú. Po tejto ekvivalentnej úprave (obe strany sú kladné) dostaneme $k(k+1) \geq k^2$. Čo je vlastne $k^2+k \geq k^2$. Teda sme sa dopracovali k zisteniu, že (2) platí, ak $k \geq 0$, čo je pravda. Platí to teda pre číslo 1 a vieme, že ak to platí pre nejaké prirodzené k, bude to platiť aj pre $k+1$.

Čo s druhou časťou? Aj tú môžeme dokázať indukciou, aby sme sa však aj niečo naučili, napíšme si ju celú trochu inak:

$$(n\cdot 1^2)\left(\left(\sqrt{1}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right) \geq (1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}})^2 \geq 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Čo sme to spravili? Naľavo sa v skutočnosti nič nezmenilo a pravá časť platí, pretože $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geq 1$.

Pripomeňme si (alebo spoznajme) známu Cauchyho nerovnosť, ktorá nám hovorí, že ak $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ sú reálne čísla, tak potom platí, že:

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2\cdots+a_k^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2\cdots+b_k^2) \geq (a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3\cdots+a_k\cdot b_k)^2$$

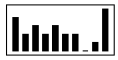
Napíšme si našu situáciu v trochu inom tvare:

$$(1^2+1^2+1^2+\cdots+1^2)\left(\left(\sqrt{1}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right) \geq (1\cdot\sqrt{1}+1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+1\cdot\frac{1}{\sqrt{n}})^2$$

Vidíme, že je to to isté. Spojením všetkých zistení sa dostávame k tomu, že nerovnosť zo zadania platí. Dokazovať Cauchyho nerovnosť nebudeme, pretože to spravili už mnohí pred nami, odporúčame napríklad toto skvelé video: `https://www.youtube.com/watch?v=_wxCw2F8m0A`.

Komentár: Ak patríte k ľuďom, ktorý o indukcii ani len nepočuli a slávne nerovnosti v živote nevideli, mohli ste jednoducho porovnávať jednotlivé členy. Stačí prísť na to, ako si odmocninu napísať ako súčet niekoľkých členov.

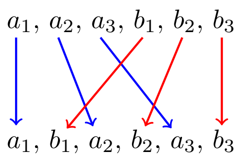
5. Opravoval: Tomáš Babej
Počet riešiteľov: 24



Máme balíček $2n$ rôznych kariet. Každé zamiešanie zmení poradie kariet z $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ na $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$. Určte všetky n, pre ktoré ak zamiešame balíček 8-krát, budú karty v rovnakom poradí ako na začiatku.

Riešenie:

Výborným spôsobom, ako sa vrhnúť na takýto druh úlohy je vyskúšať si ju pre konkrétnu malú hodnotu n. Pozrime sa teda, ako sa balíček pri miešaní správa, ak $n = 3$. Priebeh jedného miešania vyzerá nasledovne:

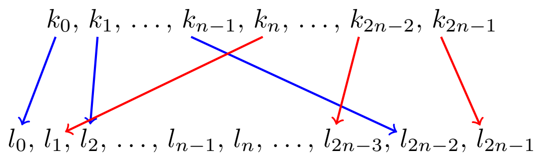


Z tohto jednoduchého prípadu môžme odvodiť základné pozorovania:

- Prvá a posledná karta nezmenia svoju pozíciu.
- Karty v prvej polovici sa neposunú doľava (ostanú na svojom mieste, alebo idú doprava).
- Karty v druhej polovici sa neposunú doprava (ostanú na svojom mieste, alebo idú doľava).

Pre úspešné vyriešenie tejto úlohy však potrebujeme odhaliť spôsob, akým sa mení pozícia karty v balíčku. Preto namiesto označenia $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ použijeme označenie $k_0, \ldots, k_{2n-1}$, čiže karty v balíčku označíme podľa ich poradia v balíčku, pričom ich indexujeme od nuly. Takto budeme vedieť lepšie sledovať pozíciu karty v balíčku počas miešania. Šikovnou vlastnosťou tohoto označenia je, že pred kartou k_i sa v balíčku nachádza práve i kariet.

Ako to teda vyzerá vo všeobecnom prípade? Pre prehľadnosť budeme karty v balíčku pred premiešaním označovať symbolom k_i a po premiešaní l_i, kde i je poradie karty v balíčku.



Teraz by sme už mali mať dostatočný prehľad na to, aby sme vedeli svoje predchádzajúce pozorovania zovšeobecniť. Pozrime sa teda na pohyb kariet v prvej a v druhej polovici balíčku oddelene:

- Uvažujme kartu k_i v prvej polovici balíčka, teda $i < n$. Po zamiešaní sa pred túto kartu dostanú všetky karty z prvej polovice, ktoré sa nachádzali pred ňou (karty $k_0, k_1, \ldots, k_{i-1}$). Taktiež sa pred ňu dostane rovnaký počet kariet z druhej polovice balíčka (karty $k_n, k_{n+1}, \ldots, k_{n+i-1}$). Tieto karty sa nachádzali za ňou, je ich spolu i a teda posunú kartu k_i o i miest doprava. Karta k_i sa teda zobrazí na kartu l_{2i} v premiešanom balíčku.
- Uvažujme teraz kartu k_i z druhej polovice balíčka, teda $i \geq n$. Analogicky, pred túto kartu sa dostanú všetky karty z druhej polovice balíčka, ktoré už pred ňou boli (karty $k_n, k_{n+1}, \ldots, k_{i-1}$) - tých je spolu $i - n$ - a o jedna väčší počet kariet z prvej polovice (pretože karty z prvej polovice majú pri premiešavaní prednosť). Spolu bude teda pred ňou $2i - 2n + 1$ kariet a teda karta k_i sa zobrazí na kartu $l_{2i-2n+1}$.

To teda nie je to všeobecné, dokonalé pravidlo, v ktoré sme dúfali. Nevieme tieto prípady nejako zjednotiť? Karta k_i sa zobrazí na kartu l_2i alebo $l_{2i-2n+1}$, v závislosti od toho, či je v prvej, alebo v druhej polovici balíčka. Po chvíľke rozmýšľania si určite všimnete, že čísla $2i$ a $2i - 2n + 1$ dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom $2n - 1$ (hovoríme aj, že sú kongurentné modulo $2n - 1$).

Máme teda naše všeobecné pravidlo. Bude však fungovať? Zvyškov po delení číslom $2n - 1$ je $2n - 1$ a my máme v balíčku $2n$ kariet. Našťastie, už sme odhalili, že sa posledná karta zobrazí stále na poslednú kartu, a tým pádom ju nemusíme uvažovať. Naše vytúžené pravidlo pre zobrazenie karty teda znie: Karta k_i sa po premiešaní zobrazí na kartu $l_{2i \pmod{2n-1}}$, kde $i < 2n - 1$.

Pozrime sa teda, čo musí platiť, aby sa karta po ôsmich premiešaniach dostala na tú istú pozíciu. Uvažujme teda kartu na indexe i. Tá po jednom premiešaní bude na indexe $2i \pmod{2n - 1}$, po dvoch premiešeniach na indexe $4i \pmod{2n - 1}$, po troch na indexe $8i \pmod{2n - 1}$. Po ôsmich premiešaniach bude teda na indexe $2^8 i \pmod{2n - 1}$, pričom aby to bola tá istá pozícia, ako na začiatku, musí platiť:

$$2^8 i \equiv i \pmod{2n - 1}$$
$$256i \equiv i \pmod{2n - 1}$$
$$255i \equiv 0 \pmod{2n - 1}$$

(Označenie $x \equiv y \pmod{n}$ znamená, že čísla x a y majú rovnaký zvyšok po delení n.)

Z toho vyplýva, že $255i$ je násobkom $2n - 1$ pre ľubovoľný platný index i. Keďže existujú indexy i, ktoré sú s $2n - 1$ zrejme nesúdeliteľné (napríklad 2), musí platiť, že 255 je násobkom $2n - 1$, t.j. $2n - 1$ je deliteľom 255.

Pozrime sa teda na deliteľov čísla $255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$, sú to čísla 1, 3, 5, 15, 17, 51, 85 a 255. Výraz $2n - 1$ môže nadobúdať hodnotu každého z nich, a teda možné hodnoty n sú:

$2n - 1$	n
1	1
3	2
5	3
15	8
17	9
51	26
85	43
255	128

Komentár: Riešenia boli vskutku rôznorodé a niektorým riešiteľom sa podarilo nájsť ultimátne pravidlo presunu kariet. Bohužiaľ, mnoho z vás sa vybralo automatizovanou cestou a pri riešení si vypomohlo výpočtovou silou počítačov, kde simulovali samotný priebeh miešania. Takéto riešenia nemohli obdržať plný počet bodov. Aj keď v reálnom svete ide o akceptovaný vedecký postup, pri ľahších problémoch, s akými sa stretávame v našom seminári, ide často o neférovú zbraň.

6. Opravoval: Matúš Stehlík

Počet riešiteľov: 9

Nech $x_1, x_2, \ldots, x_{19}$ sú prirodzené čísla menšie rovné 93 a nech $y_1, \ldots, y_{93}$ sú prirodzené čísla menšie rovné 19. Dokážte, že potom existuje (nenulový) súčet niektorých x_i, ktorý je rovný súčtu niektorých y_j.

Riešenie:

Najprv náčrt riešenia: Sporom, nech tvrdenie neplatí a nech je súčet všetkých y-ov väčší ako x-ov. Vezmeme si všetky čiastočné súčty niekoľkých prvých x-ov a ku každému nájdeme najmenší čiastočný súčet y-ov, ktorý ho prevyšuje. Ak odčítame tieto súčty x-ov od príslušných súčtov y-ov, dostaneme 19 výsledkov, všetky od od 1 po 18 (ak by tam bola 0, tak sme našli čo chceme ak by bolo viac, tak súčet y-ov nebol najmenší!). Z nich niektoré dva musia byť rovnaké. Odčítaním rovnakých od seba dostaneme 0, lenže ako sme k tejto 0 prišli? Ak si trošku premyslíme, čo sa stalo, zistíme, že to je súčet niektorých x_i mínus súčet niektorých y_j. Teraz túto úvahu zapíšeme poriadne ako sa patrí. A aby riešenie vyzeralo husto budeme používať dospelácke označenia.

Pozn. V riešení budeme pre súčty používať všeobecne známy skrátený zápis

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Symbol na pravej strane je veľké grécke písmeno sigma, ktorým označujeme súčet. Pod ním je uvedený index, ktorý majú jednotlivé sčítance rôzny a hodnota tohto indexu pre prvý sčítanec. Na vrchu je index posledného sčítanca v súčte. Pre názornosť uvedieme ešte nejaké príklady tohto zápisu.

$$y_5 + y_6 + \cdots + y_{23} = \sum_{j=5}^{23} y_j = \sum_{j=1}^{23} y_j - \sum_{j=1}^{4} y_j \qquad x_4 + x_6 + x_8 + \cdots + x_{2n} = \sum_{i=2}^{n} x_{2i}.$$

Pre spor predpokladajme, že tvrdenie neplatí. Bez ujmy na všeobecnosti, nech je súčet všetkých y_j väčší ako súčet všetkých x_i

$$\sum_{j=1}^{93} y_j > \sum_{i=1}^{19} x_i.$$

Ak by nastala rovnosť, tvrdenie platí, teda máme spor. Ak by nastala opačná nerovnosť tvrdenie dokážeme analogicky. Pre každý súčet $Sx(k) = \sum_{i=1}^{k} x_i$, nájdeme najmenší súčet $Sy(l) = \sum_{j=1}^{l} y_j$, že

$$Sy(l) = \sum_{j=1}^{l} y_j \geq \sum_{i=1}^{k} x_i = Sx(k),$$

pre spor predpokladajme, že rovnosť pre žiadne k, l nenastane. Zrejme $Sy(l) - Sx(k) \in \{1, 2, \ldots, 18\}$, lebo $Sy(l)$ bol najmenší taký, inak by sme ho mohli zmenšiť o posledný sčítanec. Máme teda 19 čísel, všetky medzi 1 a 18. Niektoré z nich musia byť rovnaké. Nech sú to

$$Sy(l_1) - Sx(k_1) = Sy(l_2) - Sx(k_2), \quad k_1 > k_2, \quad l_1 > l_2.$$

Prepíšme túto rovnosť naspäť do súčtov x_i a y_j

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{l_1} y_j - \sum_{i=1}^{k_1} x_i &= \sum_{j=1}^{l_2} y_j - \sum_{i=1}^{k2} x_i \\
\sum_{j=1}^{l_1} y_j - \sum_{j=1}^{l_2} y_j &= \sum_{i=1}^{k_1} x_i - \sum_{i=1}^{k2} x_i \\
y_{l_2+1} + \cdots + y_{l_1} = \sum_{j=l_2+1}^{l_1} y_j &= \sum_{i=l_2+1}^{k_1} x_i = x_{l_2+1} + \cdots + x_{k_1}
\end{aligned}$$

To je však spor, lebo sme našli súčet niektorých x_i rovný súčtu niektorých y_j.

Komentár: Toto je asi jediný spôsob, ktorým sa dala úloha vyriešiť, čo ju robí ťažkou, lebo nie každého hneď napadne uvedená konštrukcia. Na druhej strane, myšlienka celého dôkazu bola jednoduchá, a preto je aj riešenie pomerne krátke. Dúfame, že ste sa úspešne prehrýzli vzorovým riešením s pre mnohých novým označením. Síce v tejto úlohe by sme si vystačili aj bez neho, no nemohli sme nevyužiť príležitosť naučiť vás niečo nové (a samozrejme spraviť vzorák 6tky aspoň trošku strašidelnejším).

Poradie po 2. sérii Zimného semestra 39. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Kategória	1.	2.	3.	4.	5.	6.	S	H	CS
1. - 2.	Radovan Švarc	S4	9	9	9	9	9	9	54	2	108
	Pavol Drotár	S2	6	9	9	9	9	9	54	0	108
3.	Martin Števko	S1	7	8	9	9	5	0	47	0	101
4.	Samuel Krajči	Z9	9	8	6	9	9	-	50	0	100
5.	Juraj Mičko	S2	9	9	9	9	6	-	48	1	99
6. - 8.	Viktória Brezinová	Z9	9	8	9	9	5	-	49	0	97
	Jozef Lipták	S2	9	8	9	9	4	0	43	1	97
	Martin Masrna	S1	9	1	9	9	9	-	46	0	97
9.	Tomáš Kekeňák	S3	7	9	9	9	4	9	47	0	95
10.	Henrieta Micheľová	S3	9	9	9	9	6	-	42	0	84
11.	Daniel Onduš	S3	7	8	9	9	2	-	35	0	83
12.	Martin Spišák	S1	9	4	9	9	-	-	40	0	81
13.	Matěj Konečný	S4	9	5	9	9	-	-	32	1	77
14. - 16.	Ján Kurimský	S3	9	9	5	9	0	-	32	0	74
	Jakub Mach	S2	9	6	7	9	-	-	31	0	74
	Katarína Krajčiová	S4	9	8	9	9	8	-	43	0	74
17.	Lenka Kopfová	Z9	9	9	8	9	-	-	44	0	73
18. - 19.	Ondřej Darmovzal	S4	9	9	9	9	9	9	54	0	71
	Alexander Ténai	S4	9	9	8	9	1	-	36	0	71
20.	Laura Vištanová	S2	5	7	7	9	4	0	36	0	69
21.	Natália Tóthová	S1	8	3	8	9	-	-	37	0	68
22. - 24.	Daniel Staško	S4	8	9	-	9	-	-	26	0	65
	Tímea Zvoláneková	S1	3	3	6	9	2	-	32	0	65
	Dorota Jarošová	S4	9	6	7	9	-	-	31	0	65
25.	Peter Onduš	S1	9	4	8	-	-	-	30	0	64
26.	Jakub Genči	S2	9	7	9	9	-	-	34	0	63
27. - 28.	Juraj Jursa	S1	9	6	6	-	-	-	30	0	62
	Ádám Urbán	S2	3	7	9	9	-	-	28	0	62
29.	Zoltán Hanesz	S2	9	9	9	9	-	-	36	0	61
30. - 31.	Tomáš Domes	S2	9	8	-	9	-	-	26	0	60
	Peter Kovács	S4	9	9	9	9	-	-	36	0	60
32. - 33.	Matej Dujava	S4	9	7	9	9	3	-	37	0	59
	Michal Pándy	S2	7	9	6	9	-	-	31	0	59
34.	Martin Mičko	Z9	6	8	6	-	-	-	28	0	55
35.	Martina Šalamúnová	S3	2	3	2	9	0	0	16	0	54
36.	Martin Mihálik	Z9	9	-	9	-	-	-	27	0	53
37. - 39.	Marek Biroš	S4	9	1	-	9	0	-	19	0	50
	Jakub Žoldák	S2	2	8	-	9	2	-	21	0	50
	Filip Csonka	Z9	5	7	6	-	-	-	25	0	50
40.	Jozef Jagerský	S1	3	2	4	1	-	-	14	0	48
41. - 42.	Ekaterina Volková	S3	2	2	1	9	0	0	14	0	43
	Kristína Bratková	S2	9	1	0	-	1	-	11	0	43
43. - 46.	Veronika Demčáková	S2	7	1	-	9	-	-	17	0	41
	Diana Hlaváčová	S3	0	5	-	9	-	-	14	0	41
	Eduard Oravkin	S3	-	-	-	-	-	-	0	0	41
	Oľga Prachářová	S3	-	-	-	-	-	-	0	0	41
47.	Martin Šalagovič	None	6	-	-	-	-	-	12	0	39
48.	Martin Vrabec	S4	9	8	9	9	3	-	38	0	38
49.	Eduard Lavuš	S2	-	-	-	-	-	-	0	0	37
50.	Žaneta Semanišinová	S3	-	-	-	-	-	-	0	0	34
51.	Kristína Mišlanová	S3	-	-	-	-	-	-	0	0	33
52. - 53.	Jana Sadovská	S1	-	-	-	-	-	-	0	0	32
	Michaela Dlugošová	S1	-	-	-	-	-	-	0	0	32
54.	Jozef Janovec	S4	-	8	-	-	-	-	8	0	30
55. - 56.	Milan Kubala	S3	-	-	-	-	-	-	0	0	29
	Roman Staňo	S4	-	-	-	-	-	-	0	0	29
57. - 62.	Zuzana Svobodová	S3	-	-	9	-	-	-	9	0	27
	Daniel Koľ	S2	3	-	0	3	-	-	6	0	27
	Anton Gromóczki	S4	9	-	-	-	-	-	9	0	27

P.	Meno a priezvisko	Kategória	1.	2.	3.	4.	5.	6.	S	H	CS
	Jozef Šarišský	S1	0	-	-	-	-	-	0	0	27
	Jarmila Šimková	S1	-	-	-	-	-	-	0	0	27
	Ján Pavlech	S1	-	-	-	-	-	-	0	0	27
63. - 65.	Dominik Krasula	S2	-	-	-	-	-	-	0	0	26
	Tobiáš Babej	S1	-	-	-	-	-	-	0	0	26
	Tomáš Kuzma	S3	-	-	-	-	-	-	0	0	26
66.	Tomáš Terem	S3	-	-	-	-	-	-	0	0	25
67. - 68.	Ján Gerčák	S1	-	-	-	-	-	-	0	0	24
	Veronika Rišková	S2	-	-	-	-	-	-	0	0	24
69. - 71.	Pavol Petruš	S2	-	-	-	-	-	-	0	0	22
	Radka Bušovská	S3	-	-	-	-	-	-	0	0	22
	Richard Pavčík	S3	9	4	-	9	-	-	22	0	22
72. - 73.	Pavol Mártonfi	S2	-	-	-	-	-	-	0	0	21
	Marianna Pavlišinová	S2	-	-	-	-	-	-	0	0	21
74.	Šimon Vančo	S3	-	-	-	-	-	-	0	0	20
75.	Samuel Schneider	S3	-	-	-	-	-	-	0	0	19
76. - 77.	Jozef Tanzer	S1	-	-	-	-	-	-	0	0	18
	Samuel Oswald	S2	-	-	-	-	-	-	0	0	18
78. - 79.	Veronika Schmidtová	S2	-	-	-	-	-	-	0	0	16
	Rajmund Hruška	S2	-	-	-	-	-	-	0	0	16
80.	Valentín Harničár	S2	-	-	-	-	-	-	0	0	11
81.	Samuel Chaba	Z9	-	-	-	-	-	-	0	0	10
82. - 83.	Ján Špak	S4	-	-	-	-	-	-	0	0	9
	Matúš Zembjak	S3	-	-	-	9	-	-	9	0	9
84.	Anna Čujová	S1	-	-	-	-	-	-	0	0	6
85.	Ondrej Bínovský	S4	-	-	-	5	-	-	5	0	5
86.	Marek Koman	S1	-	-	-	-	-	-	0	0	0

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

Projekt podporila Nadácia pre deti Slovenska z fondu Hodina deťom

Názov STROM – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 3 • December 2014 • Zimný semester 39. ročníka (2014/2015)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `http://www.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`