STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahojte Stromáci,

Je to tu! Posledné body boli pridelené a máme výsledky. Nevieme síce ako vy, ale my už to napätie nevydržíme. Preto rýchlo vybavme formality - prajeme príjemné ukončenie školského roka, ešte príjemnejšie prázdniny a veľa darčekov tým, čo budú mať dôvod nejaké dostať. A teraz už nestrácajte čas. Rýchlo sa pozrite, ako sa mali jednotlivé príklady riešiť a koľko bodov ste za svoje riešenie dostali. Potom to patrične oslávte! Ak ste mali bodov veľa, tak sa tešte, že ste dobrí, ak málo, tak sa radujte, že ešte stále máte možnosť zlepšovať sa. V jeseni sa na vás tešia

vaši **STROM**isti

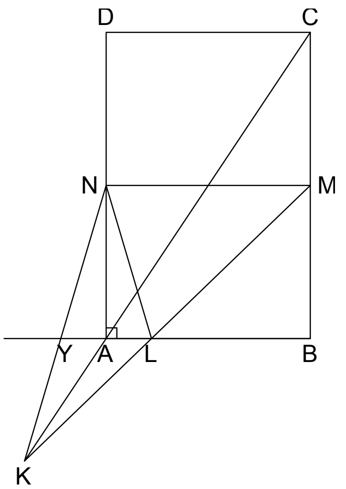
Riešenia 2. série úloh Letného semestra 37. ročníka

1. Daný je obdĺžnik $ABCD$, M a N sú stredy strán BC a AD. Na polpriamke CA za bodom A zvolíme bod K. Označme L priesečník úsečiek KM a AB. Dokážte, že $|\sphericalangle KNA| = |\sphericalangle LNA|$.

Opravovali: Robčo Tóth **Počet riešiteľov: 15**

<u>Riešenie:</u>

Medzi najväčšie z výhod geometrických úloh patrí, že sa okrem odvodzovania smerom dopredu zo zadaných údajov vieme pozrieť na úlohu aj "odzadu".



Pozrime sa preto, čo by znamenala platnosť nášho tvrdenia. Po chvíľke uvažovania prídeme na to, že ak si ako bod Y označíme priesečník priamky AB s priamkou KN a má platiť, že uhly zo zadania su rovnaké, potom trojuholníky YNA a LAN budú zhodné. Ale pozor! Toto nie je to, čo by sme mali napísať do nášho riešenia. Totiž my máme rovnakosť tých uhlov dokázať a nemôžeme naše riešenie začať s tým, čo by sa stalo, ak by platila.

Dostali sme ale do rúk silný nástroj – previedli sme úlohu o dvoch uhloch na úlohu o dvoch úsečkách. Totiž ak ukážeme, že $|YA| = |AL|$, úloha je vyriešená, lebo trojuholníky YNA a LAN budú zhodné podľa vety (sus) a tým pádom dostaneme aj požadovanú rovnosť príslušných uhlov. Vo všeobecnosti nám takýto prístup ale nemusí pomôcť, lebo nie vždy platí, že ak z A vyplýva B, tak aj z B vyplýva A. Pozor na to!

Teraz už je úloha naozaj nenáročná. Označme S ako priesečník AC a NM. Ľahko nahliadneme, že S je v strede strany NM. Potom KS je ťažnicou v trojuholníku KMN a keďže YL je rovnobežná s NM, trojuholníky KYL a KNM sú podobné a úsečka YL musí byť tiež ťaznicou v trojuholníku KYL, t.j rozdeľovať úsečku YL na dve rovnako dlhé časti.

2. Nájdite všetky mocniny dvojky, z ktorých sa dá preusporiadaním číslic dostať iná mocnina dvojky. (Nuly na začiatku nie su povolené, napr. 0032 nebudeme považovať za číslo.)

Opravovali: Janka Baranová a Rišo Trembecký **Počet riešiteľov: 21**

Riešenie:

Naše dve rôzne mocniny dvojky majú rovnaké cifry, teda aj rovnaký ciferný súčet. Podľa kritéria deliteľnosti 9 vieme, že číslo dáva po delení 9 rovnaký zvyšok ako jeho ciferný súčet. Keďže naše mocniny majú ciferný súčet rovnaký, dávajú rovnaký zvyšok po delení 9 a teda ich rozdiel musí byť deliteľný 9.

Ďalej chceme zistiť, koľko mocnín dvojky môže mať rovnaký počet cifier. Majme nejakú mocninu dvojky. Ďalšími potenciálnymi mocninami v poradí (s rovnakým počtom cifier) sú jej 2-násobok, 4-násobok a 8-násobok, no 16-násobok je už určite viac ako 10-násobok pôvodnej mocniny, preto bude mať viac cifier.

Máme teda najviac štyri mocniny dvojky s rovnakým počtom cifier (2^a, $2 \cdot 2^a$, $4 \cdot 2^a$, $8 \cdot 2^a$), rozdiely medzi nimi môžu byť $(8-1) \cdot 2^x = 7 \cdot 2^x$, $(4-1) \cdot 2^x = 3 \cdot 2^x$ a $(2-1) \cdot 2^x = 2^x$, ale ako vidíme, nedostávame číslo deliteľné 9, čo je spor, a preto takéto dve mocniny neexistujú.

3. Nech P je mnohočlen s celočíselnými koeficientami s vlastnosťou $P(a) = P(b) = P(c) = -1$, kde a, b, c sú nejaké navzájom rôzne celé čísla. Dokážte, že polynóm P nemá žiaden celočíselný koreň.

Opravoval: Laco Bačo **Počet riešiteľov: 6**

Riešenie:

Vo vzorovom riešení tretej úlohy prvej série sme si ukázali, že pre mnohočleny s celočíselnými koeficientami a navzájom rôzne celé čísla d, e platí

$$d - e \mid P(d) - P(e)$$

Poďme teraz túto vlastnosť využiť. Predpokladajme, že číslo x je koreňom P. Zároveň x je rôzne od a, b, c, pretože $P(a) = P(b) = P(c) = -1$. Potom môžeme využiť vyššie uvedenú vlastnosť o deliteľnosti, čím dostávame

$$\begin{aligned} x - a \mid P(x) - P(a) \quad &\Rightarrow \quad x - a \mid 1 \\ x - b \mid P(x) - P(b) \quad &\Rightarrow \quad x - b \mid 1 \\ x - c \mid P(x) - P(c) \quad &\Rightarrow \quad x - c \mid 1 \end{aligned}$$

Zo zadania vieme, že a, b, c sú rôzne celé čísla, preto aj $x - a, x - b, x - c$ sú rôzne celé čísla. Navyše, tieto tri čísla by mali byť deliteľmi čísla 1. No jednotka má len dva rôzne celočíselné delitele, 1 a -1, čím sa dostavame do sporu. Teda náš predpoklad o existencii koreňa x je nesprávny a mnohočlen P nemôže mať žiadny celočíselný koreň.

Iné riešenie:

Poznáme tri body mnohočlena P, v ktorých nadobúda hodnotu -1. Lepšie sa nám však pracuje s mnohočlenmi, keď vieme niečo povedať o ich nulových bodoch. Nič nám však nebráni vyrobiť si taký mnohočlen pomocou P. Nech Q je mnohočlen, ktorý vznikne z mnohočlena P pripočítaním jednotky, teda

$$Q(x) = P(x) + 1$$

Potom $Q(a) = Q(b) = Q(c) = 0$, teda čísla a, b, c sú tri rôzne korene mnohočlena Q. To znamená, že Q je násobkom $x - a$, $x - b$ aj $x - c$ pre každé x. Inak povedané, mnohočlen Q vieme napísať v tvare

$$Q(x) = (x - a)(x - b)(x - c)R(x),$$

kde $R(x)$ je podiel mnohočlenov $P(x)$ a $(x-a)(x-b)(x-c)$. $R(x)$ je opäť mnohočlen s celočíselnými koeficientami (premyslite si, prečo).
Dobre, máme nejaký záhadný mnohočlen Q, ešte záhadnejší mnohočlen R, ale čo s nimi? Vráťme sa k pôvodnej úlohe. Chceme ukázať, že P nemá žiadny celočíselný koreň. Prečo by ho nemohol mať? Predpokladajme na chvíľu, že nejaké číslo y je koreňom P, teda že $P(y) = 0$ a

$$Q(y) = (y-a)(y-b)(y-c)R(y) = 1 \qquad (1).$$

Zo zadania vieme, že a, b, c sú rôzne celé čísla, preto aj $y-a, y-b, y-c$ sú rôzne celé čísla. $R(y)$ je tiež celé číslo. Vzťah (1) nám teda hovorí, že $y-a, y-b, y-c$ sú tri rôzne delitele čísla 1, čo však nemôže nastať, lebo jednotka má len dva delitele, 1 a -1. Tým sme našli spor a náš predpoklad o existencii koreňa y sa ukázal nesprávny.

Komentár: Vo vzorovom riešení minulej série bola uvedená dôležitá vlastnosť mnohočlenov, vďaka ktorej riešenie tejto úlohy nebolo ťažké. Škoda, že si to všimla len jedna riešiteľka, správnych riešení mohlo byť oveľa viac. Celkovo je škoda, že len šiesti ľudia našli odvahu poslať niečo k tejto peknej úlohe :-(

4. Máme kocku so stranou dlhou $n \in \mathbb{N}$, ktorá je postavená v súradnicovej sústave tak, že jeden jej vrchol je v bode $(0,0,0)$ a iný v bode (n,n,n). Potrebujeme sa dostať z bodu $(0,0,0)$ do bodu (n,n,n). Pohybovať sa môžeme len po povrchu kocky a len po úsečkách spájajúcich susedné body s celočíselnými súradnicami. (Dva body s celočíselnými súradnicami sú susedné, ak sa líšia len v jednej súradnici a tento rozdiel je 1.)

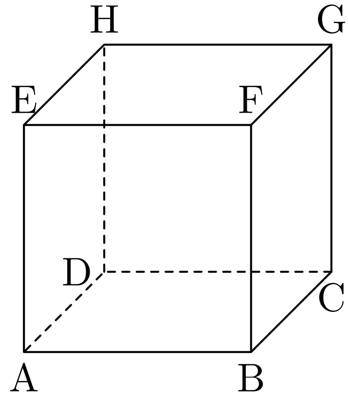
- Aká je dĺžka najkratšej takejto cesty z bodu $(0,0,0)$ do bodu (n,n,n)?
- Koľko je rôznych najkratších ciest?

Opravovali: Peter Milošovič **Počet riešiteľov: 17**

Riešenie:

Označme jednotlivé vrcholy: $(0,0,0)$ ako A, $(n,0,0)$ bude B, $(0,n,n)$ zas C, D bude $(0,n,0)$, $(0,0,n)$ nazvime E, $(n,0,n)$ pomenujme F, (n,n,n) volajme odteraz G a $(0,n,n)$ dostane označenie H.

Aká je dĺžka najkratšej cesty?



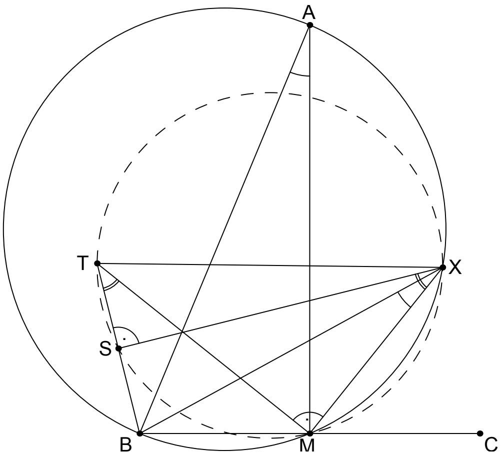
Vieme sa pohybovať len po susedných bodoch a každé dva susedné body sa líšia len v jednej zo súradníc, a to práve o 1. Ak sa chceme dostať z bodu A do bodu G, každá súradnica sa zmení o n. To znamená, že musíme vykonať aspoň $3n$ pohybov - prejsť cestu dĺžky aspoň $3n$. Takáto cesta existuje, napríklad z A priamo do B, odtiaľ priamo do F a nakoniec priamo do G. Najkratšia cesta z A do G má teda dĺžku $3n$.
Koľko je týchto ciest?
Môžeme využiť symetrickosť kocky a pozrieť sa na počet ciest, ktoré vedú do bodu $(n,n,n-1)$, pretože ten bude zrejme rovnaký ako počet ciest do bodu $(n,n-1,n)$ alebo $(n-1,n,n)$. Tento prístup si môžete vyskúšať doma.
Jednoduchšie je ale pozerať sa na cesty, ktoré prechádzajú hranou EF (prechádzajú v zmysle: "aspoň jeden bod cesty sa nachádza na hrane EF"). Tento bude zrejme rovnaký ako počet ciest prechádzajúcich cez hranu BF, BC, CD, DH či EH. Hýbeme sa len po povrchu kocky, môžeme sa teda pýtať, koľko najkratších ciest existuje v obdĺžniku s dĺžkami strán n a $2n$, ak sa vieme hýbať len o 1, rovnobežne s hociktorou zo strán. Máme k dispozícii $3n$ pohybov a práve n z nich má byť orientovaných jedným smerom, zvyšných $2n$ smerom kolmým na tento. Buď si spomenieme na vzorec pre počet

permutácií, alebo si uvedomíme, že vyberáme n prvkov z $3n$. Takže počet ciest, ktoré prechádzajú jednou zo spomínaných hrán je kombinačné číslo $\binom{3n}{n}$, spolu by sme mali $6\binom{3n}{n}$.
Niektoré cesty ale prechádzajú naraz viacerými hranami, napríklad cesty idúce cez vrchol E prechádzajú naraz hranami EF a EH. Takéto sme zarátali dvakrát až trikrát. Trikrát cesty, ktoré idú len po hranách (ako napríklad tá naša demonštrujúca existenciu cesty dĺžky $3n$), dvakrát tie, čo obsahujú len jednu z hrán kocky.
Cesty, ktoré prechádzajú jedným z vrcholov, sú zároveň cestami, ktoré obsahujú niektorú z hrán. Prečo? Do vrcholov B, D a E sa nevieme z A dostať inak ako priamo, teda po hrane a z vrcholov C, F a H sa nevieme do G dostať inak ako priamo, teda po hrane (po hrane v zmysle "cesta prejde cez všetky body hrany").
A teda ak zrátame počet ciest, ktoré prechádzajú niektorým z vrcholov (iným ako A a G), a vynásobíme ho počtom týchto vrcholov, zarátame vlastne raz každú z ciest, ktorá obsahuje len jednu z hrán kocky a dvakrát každú z ciest, ktorá ide len po hranách (keďže takáto cesta prechádza práve dvoma vrcholmi rôznymi od A a G). Čiže potom už len odrátame tento počet od počtu $6\binom{3n}{n}$, do ktorého sme zarátali presne tieto cesty navyše.
Chceme teda zistiť, koľkými cestami sa vieme dostať z jedného vrchola steny do druhého. Máme štvorec s dĺžkou strany n a n pohybov má byť jedným smerom, n pohybov smerom kolmým na tento. Ciest je teda $\binom{2n}{n}$, vrcholov rôznych od A a G je 6, spolu je to teda $6\binom{2n}{n}$.
Rôznych najkratších ciest z A do G je potom $6\left(\binom{3n}{n} - \binom{2n}{n}\right)$.

Komentár: Rada pre všetkých: vždy si svoj výsledok overte aspoň pre nejaké malé hodnoty. Mnohí z vás by sa iste zarazili, keď by im pre jednoduchú kocku s dĺžkou hrany 1 zrazu vyšlo viac ako 6 rôznych ciest. Taktiež zahoďte hanbu a nebojte sa pri takýchto úlohách zobrať do ruky teleso, s ktorým sa pracuje. Môžete sa tak uistiť, že ste na nič nezabudli a naozaj sa všetko správa tak ako popisujete.

5. Daný je rovnoramenný trojuholník ABC, kde $|AB| = |AC|$. Označme M stred úsečky BC. Nech X je bod na kratšom oblúku MA kružnice opísanej trojuholníku ABM. Nech T je vnútorný bod uhla BMA, pre ktorý $|\sphericalangle TMX| = 90°$ a $|TX| = |BX|$. Dokážte, že hodnota rozdielu $|\sphericalangle MTB| - |\sphericalangle CTM|$ nezávisí na voľbe X.

Opravovali: Ivka Gašková a Paľo Lietadlo Koprda **Počet riešiteľov: 3**
Riešenie:



Označme si stred BT ako S. Uhly TSX a TMX sú pravé, body S a M teda ležia na Tálesovej kružnici s priemerom TX. Štvoruholník $TSMX$ je teda tetivový. Keďže SM je stredná priečka v trojuholníku BTC, priamky SM a CT sú rovnobežné, a teda uhly CTM a TMS sú zhodné, pretože sú striedavé. Keďže ide o tetivový štvoruholník, tieto uhly sú zhodné navyše aj s $\sphericalangle TXS$, teda aj s $\sphericalangle BXS$. Vieme teda, že $|\sphericalangle CTM| = |\sphericalangle BXS|$.
Uhol MTB je rovnako veľký ako uhol MTS, keďže body B a S ležia na jednej priamke, a je zhodný aj s uhlom MXS, keďže štvoruholník $TSMX$ je tetivový.
Nakoľko $|\sphericalangle CTM| = |\sphericalangle BXS|$ a $|\sphericalangle MXS| = |\sphericalangle MTB|$,

$$|\sphericalangle MTB| - |\sphericalangle CTM| = |\sphericalangle MXS| - |\sphericalangle BXS| = |\sphericalangle MXB|.$$

Body B, M, X, A ležia na kružnici, a teda $|\sphericalangle MXB| = |\sphericalangle MAB|$. Veľkosť uhla MAB však nezávisí od polohy bodu X. Hodnota rozdielu $|\sphericalangle MTB| - |\sphericalangle CTM|$ teda nezávisí na voľbe bodu X, čo sme chceli dokázať.

6. Nech k, n sú prirodzené čísla, pričom k je nepárne. Dokážte, že súčet $1^k + 2^k + \cdots + n^k$ je deliteľný súčtom $1 + 2 + \cdots + n$.

Opravovali: Maťo Vodička a Matúš Stehlík **Počet riešiteľov: 7**

Riešenie:

Je známe, že $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$.
Máme dokázať, že $n(n+1)/2 \mid 1^k + \cdots + n^k$. To je ekvivalentné s

$$n(n+1) \mid 2 \cdot (1^k + \cdots + n^k)$$

No vieme, že n a $(n+1)$ sú nesúdeliteľné, a preto nám stačí dokázať, že

$$n \mid 2 \cdot (1^k + \cdots + n^k) \text{ a tiež } n+1 \mid 2 \cdot (1^k + \cdots + n^k),$$

lebo potom to bude deliť aj ich súčin.

$$2 \cdot (1^k + \cdots + n^k) = [1^k + (n+1-1)^k] + [2^k + (n+1-2)^k] + \cdots + [n^k + (n+1-n)^k].$$

No my vieme, že pre nepárne k platí

$$a^k + b^k = (a+b)(a^{k-1} - a^{k-2}b + \cdots + b^{k-1}),$$

a teda že $a^{k-1} \mid a^k + b^k$.
Preto $n+1 \mid i^k + (n+1-i)^k$, a teda delí každú zátvorku z toho súčtu - delí aj celý súčet

$$n+1 \mid 2 \cdot (1^k + \cdots + n^k).$$

Obdobne dokážeme deliteľnosť n.

$$\begin{aligned} 2 \cdot (1^k + \cdots + n^k) &= 2 \cdot (1^k + \cdots + (n-1)^k) + 2 * n^k \\ &= [1^k + (n-1)^k] + [2^k + (n-2)^k] + \cdots + [(n-1)^k + (n-(n-1))^k] + 2 \cdot n^k. \end{aligned}$$

Z rovnakáho dôvodu n delí každú hranatú zátvorku a tiež vieme, že $n \mid 2 \cdot n^k$ a preto musí deliť aj ich súčet, t.j.

$$n \mid 2 \cdot (1^k + \cdots + n^k)$$

A máme, čo sme chceli, lebo potom

$$n(n+1) \mid 2 \cdot (1^k + \cdots + n^k) \text{ a aj } 1 + 2 + \cdots + n \mid 1^k + \cdots + n^k.$$

Konečné poradie Letného semestra 37. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1.	Miroslav Stankovič	3. A	GPoštKE	9	9	9	9	9	-	9	9	9	6	9	8	0	95
2.	Žaneta Semanišinová	Kvinta A	GAlejKE	9	9	9	-	-	-	9	9	-	-	-	-	0	63
3.	Marko Puza	3. A	GPoštKE	0	9	7	9	-	-	9	9	-	5	9	4	0	61
4.	Jozef Lukáč	3. C	GJiráBJ	7	9	7	9	-	3	7	9	-	5	-	-	0	56
5.	Daniel Onduš	Kvinta A	GAlejKE	9	-	4	-	-	-	9	9	-	5	-	-	0	54
6.	Roman Staňo	2. A	GPoštKE	9	9	9	-	-	-	3	9	-	6	-	8	0	53
7.	Henrieta Micheľová	Kvinta A	GAlejKE	5	9	9	2	-	-	2	3	-	5	-	-	0	49
8.	Václav Krchňák	1. A	GJaroCZ	-	9	9	-	-	-	-	8	3	-	-	-	0	46
8.	Vladislav Vancák	Septima B	GAlejKE	6	9	-	-	-	-	9	8	9	5	-	-	0	46
10.	Alexander Ténai	2. A	GPoštKE	7	8	9	-	-	-	-	9	8	3	-	-	0	44

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
11.	Jakub Šafin	4. G	GMasaMI	8	9	9	9	-	7	-	-	-	-	-	-	0	42
12.	Róbert Schönfeld	2. A	GPoštKE	6	9	-	-	-	-	-	9	-	6	-	9	0	39
13.	Soňa Feciskaninová	Kvinta A	GAlejKE	-	9	-	-	-	-	9	0	-	-	-	-	0	36
14.	Jakub Dargaj	3. A	GPoštKE	-	9	9	-	-	-	-	7	-	-	-	9	0	34
14.	Ľudmila Šimková	Septima	GPároNR	5	9	8	-	-	-	-	9	-	3	-	-	0	34
16.	Katarína Krajčiová	Sexta	GAlejKE	-	-	-	-	-	-	9	9	9	6	-	-	0	33
17.	Daniel Pišťák	5. M	GChDPaCZ	-	-	-	-	-	-	9	9	-	3	-	0	0	30
18.	Šimon Soták	Kvinta A	GAlejKE	-	9	9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	27
19.	Kristína Mišlanová	Kvinta A	GAlejKE	4	-	9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	22
19.	Florián Hatala	2. A	GPoštKE	9	-	-	-	-	-	-	8	-	5	-	0	0	22
21.	Šimon Vančo	1. B	GŠtúrSL	-	-	-	-	-	-	7	-	-	4	2	-	0	20
21.	Anton Gromóczki	2. A	GPoštKE	-	9	-	-	-	-	-	8	-	3	-	-	0	20
23.	Radka Bušovská	Kvinta A	GAlejKE	-	-	-	-	-	-	9	0	-	-	-	-	0	18
23.	Samuel Krajči	Sekunda	GAlejKE	-	9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	18
25.	Peter Kovács	Sexta	GAlejKE	2	8	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	17
26.	Ján Špak	2. B	GŠkulKE	6	9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	15
26.	Dorota Jarošová	Sexta	GAlejKE	1	9	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	15
28.	Lucia Leličová	2. A	GPoštKE	-	-	-	-	-	-	-	1	8	3	-	-	0	12
29.	Alexandra Repíková	Kvinta A	GAlejKE	-	-	-	-	-	-	5	0	-	-	-	-	0	10
29.	Martina Oravcová	3. A	GPoštKE	1	9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	10
29.	Zoltán Hanesz	9. A	ZKuzmKE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5	-	-	0	10
29.	Vladimír Sabo	Septima B	GAlejKE	4	5	1	0	0	0	-	-	-	-	-	-	0	10
33.	Jozef Janovec	Sexta	GAlejKE	5	-	-	-	-	-	3	-	-	-	-	-	0	8
34.	Ján Kurimský	1. B	GŠevčPO	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	4

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach
- Agentúre na podporu výskumu a vývoja prostredníctvom projektu:
  LPP-0057-09 Rozvíjanie talentu prostredníctvom korešpondenčných seminárov a súťaží

Názov **STROM** – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 6 • Máj 2013 • Letný semester 37. ročníka (2012/2013)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `http://www.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`