



## *Milí riešitelia,*

A je to tu. Už si môžete prestať obhrýzať nechty a v noci sa už nemusíte nervózne prevaľovať. Vaša dávka zaujímavých príkladov dorazila a veru je sa na čo tešiť. Roboty, marťanské jazyky, prvočísla - to je len zlomok toho čo na vás čaká. Dosť však bolo rečí. Poriadne sa nadýchnite. Chopte sa pier, ceruziek a papierov. A vrhnite sa do riešenia ako blázni, pretože iba zopár z vás bude odmenených. Ostatným ostane len smútok a závišť. Tak veľa šťastia.

## *Čo je seminár STROM?*

Seminár **STROM** (Súťaž **T**alentovaných **R**iešiteľov **O**blubujúcich **M**atematiku), organizovaný Združením **STROM**, je pokračovateľom najstaršej súťaže svojho druhu v bývalom Česko-Slovensku, ktorá vznikla pod názvom Korešpondenčný matematický seminár v roku 1976 v Košiciach. Tento seminár je *bezplatný* a je určený najmä pre žiakov stredných škôl, no zapojiť sa môžu aj mladší. Každý školský rok čakajú na riešiteľov dva semestre, v ktorých dostanú zadania dvoch sérií príkladov.

Tí najlepší riešitelia sa potom dostanú na týždňové sústredenie a zažijú veľa zábavy. Sústredenia na konci semestrov majú byť pre žiakov odmenou a zároveň motiváciou pre pokračovanie a zlepšovanie sa v riešení matematických seminárov.

Samotná korešpondenčná časť je v priebehu roka doplňovaná rôznymi akciami. Každoročne organizujeme Matboj, matematickú súťaž pre družstvá, ale aj zábavné hry, výlety alebo športové stretnutia. Naším cieľom je ukázať žiakom krásu matematiky, niekedy aj netradičným a hravým spôsobom. Preto dúfame, že náš seminár a s ním spojené akcie si nájdu svojich stálych nadšencov v radoch žiakov, ale aj podporovateľov v radoch učiteľov.

## *Matematický krúžok*

Aj v školskom roku 2012/2013 sa na **Prírodovedeckej fakulte UPJŠ** v Košiciach na Jesennej 5 v miestnosti VKM každý týždeň vo **štvrtok o 15:00** koná matematický krúžok, ktorý je zameraný hlavne na prípravu na Matematickú olympiádu v kategóriách A, B a C.

Krúžku sa môže zúčastniť ktorýkoľvek stredoškôlak (ale i šikovný základoškolák), ktorý sa chce venovať Matematickej olympiáde. Prvý krúžok sa uskutoční **20. septembra 2012**.

Podrobnejšie informácie môžete nájsť na stránke [umv.science.upjs.sk/mo](http://umv.science.upjs.sk/mo).

## *Pokyny pre riešiteľov*

**Seminár** je určený pre žiakov prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných gymnázií a bilingválnych gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci z nižších ročníkov; v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci. **STROM** je súťaž jednotlivcov.

**Úlohy** riešte zásadne samostatne, neodpisujte, v riešeniach vysvetľujte celý svoj myšlienkový postup ako v Matematickej olympiáde. Svoje riešenia môžete poslať poštou alebo e-mailom, nie odovzdávať osobne. Pri opravovaní sa držíme zásady, že čo sa nedá prečítať, nemôže byť ohodnotené bodmi. Preto

zvážte, či nenapíšete svoje riešenie na počítači. Riešenia poštou zasielajte do uvedeného termínu (rozhoduje dátum poštovej pečiatky) na adresu

PF UPJŠ  
STROM  
Jesenná 5  
041 54 Košice.

V prípade zasielania riešení e-mailom ich posielajte na e-mailovú adresu [riesenia@strom.sk](mailto:riesenia@strom.sk) vo formáte PDF. Všetky úlohy môžete poslať jedným e-mailom; do predmetu napíšte (bez diakritiky) STROM - vaše priezvisko. Prílohy označte svojím priezviskom, sériou a číslom príkladu. Napríklad riešiteľ Jožko Mrkvicka pošle e-mail s predmetom **STROM - Mrkvicka** a jeho prílohy (riešenia úloh 2 a 5) budú označené **Mrkvicka\_1seria\_2uloha.pdf** a **Mrkvicka\_1seria\_5uloha.pdf**.

Vaše riešenia musia dôjsť do 22:00 v deň termínu série a len na uvedenú adresu. Ich prijatie bude potvrdené e-mailom. Technické problémy na našej či vašej strane nie sú dôvodom na akceptovanie riešení doručených po termíne. Akceptujeme prvé riešenie danej úlohy, ktoré pošlete.

S prvou sériou, ktorej riešenia nám posielate, pošlite vyplnenú **príhlášku**. Riešenie každej úlohy píšete na samostatný papier **formátu A4**, respektíve do samostatného súboru, na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás cez e-mail [strom@strom.sk](mailto:strom@strom.sk), prostredníctvom debaty na našej stránke alebo osobne.

**Bodovanie** úloh závisí od kvality riešenia. Za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Body môžete získať aj za čiastočné vyriešenie zadaných úloh. Preto sa nebojte poslať aj svoje neúplné riešenia. Do celkového poradia sa započítavajú body takto:

**štvrtáci, oktáva:** všetky vyriešené úlohy

**tretiaci, septima:** všetky vyriešené úlohy

**druháci, sexta:** päť najlepšie vyriešených úloh plus minimum z týchto piatich úloh

**prváci, kvinta a mladší:** päť najlepšie vyriešených úloh plus maximum z týchto piatich úloh

### Príklad použitia pravidiel:

Štyria bratia, štvrták Vlado, tretiak Fero, druhák Jaro a prvák Marcel, vyriešili všetky úlohy úplne rovnako (zhodou náhod, že) – za 3, 2, 4, 1, 5 a 4 body. Vlado potom získal  $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$  bodov, Fero tiež získal  $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$  bodov, Jaro ( $3 + \underline{2} + 4 + 5 + 4$ ) + 2 = 20 bodov a Marcel ( $3 + 2 + 4 + \underline{5} + 4$ ) + 5 = 23 bodov. Jasné, nie?

**Varovania (!!!).** Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú za odpisovanie a za poslanie riešení po termíne. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhľujeme nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdete úlohu riešenú v literatúre, uveďte názov, autora a stranu, inak riskujete stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie). V prípade, že nie ste spokojní s bodovým ohodnotením vášho riešenia, môžete nám do dvoch týždňov od rozoslania riešenia zaslať poštou sťažnosť a tá bude prešetrná.

**Hlasovanie** úloh závisí od zaujímavosti a jedinečnosti vášho riešenia. Radosť vám môže spraviť 1 hlas (prehľadné, jasné riešenie), alebo 2 či 3 hlasy za výnimočné a originálne nápady. Ak nájdete riešenie v literatúre, kladné hlasy si nepripočítate. Naopak, hrôzu budiace riešenia (výzorom, zložitou) získajú –1 hlas. Horšie obídu tí, ktorým opakovane za odpisovanie strhneme body. Po ich vydedení počtom odpisujúcich dostanú –3 hlasy, po veľkom odpisovaní je to –5 hlasov za každú odpísanú úlohu. Tak hor sa do hľadania pekných riešení, zabudnime na odpisovanie a hrajme sa s matematikou!

**Sústredenie** je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Zúčastnia sa ho najlepší riešitelia podľa záverečného poradia a členovia minimálne prvých troch najlepších družstiev z matboja, ak sa v príslušnom polroku koná. Prípadní ďalší účastníci

a náhradníci sú pozývaní podľa poradia **STROMu** a matboja; nie však tí riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou. Na sústredenie nebudú na základe poradia **STROMu** vôbec pozvaní riešitelia, ktorí získali v príslušnom semestri menej ako 20 bodov.

## Zadania úloh zimného semestra 37. ročníka

# 1 Prvá séria

Termín odoslania riešení: **15. 10. 2012**

1. Nájdite všetky prirodzené čísla  $n$ , pre ktoré sa ciferný súčet čísla  $2^n$  rovná 5.

2. Označme  $S$  obsah štvoruholníka  $ABCD$ . Dokážte, že

$$4S \leq (|AB| + |CD|)(|BC| + |DA|).$$

Pre ktoré štvoruholníky nastáva rovnosť?

3. Máte 14 mincí, pričom 7 z nich je pravých a 7 falošných. Neviete, ktoré sú ktoré. Všetky falošné mince vážia rovnako a všetky pravé mince vážia rovnako. Vieme, že falošné mince sú ľahšie ako pravé, no jediný, kto vie tento nepatrný rozdiel rozpoznať, je robot Karol. Ak dáte Karolovi do každej z jeho dvoch rúk ľubovoľný počet mincí a potom ho kopnete, Karol ich odváži a

- ak sú hmotnosti mincí v jeho rukách rovnaké, tak Karol povie, že sú rovnaké a mince si môžete zobrať;
- ak sú hmotnosti rôzne, Karol vám povie, v ktorej ruke je hmotnosť väčšia, dá si náhodnú mincu z „ťažšej“ ruky do vrečka a zvyšné mince si môžete zobrať.

Vaším cieľom je získať aspoň jednu pravú mincu. Popíšte postup, ako zaručene pravú mincu získať, alebo dokážte, že takýto zaručený postup neexistuje. *Mince si nemôžete označiť a ak skončia v Karolovom vrečku sú nenávratne preč.*

4. V rovine je daných 50 bodov, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke. Každý z týchto bodov má jednu zo štyroch daných farieb. Dokážte, že vieme zvoliť jednu z týchto štyroch farieb tak, že sa dá nájsť aspoň 130 nerovnoramenných trojuholníkov, ktorých všetky vrcholy majú zvolenú farbu.

5. Daný je rovnoramenný pravouhlý trojuholník  $ABC$  s pravým uhlom pri vrchole  $C$ . Na stranách  $CA$  a  $CB$  sú postupne dané body  $D$  a  $E$  tak, že  $|CD| = |CE|$ . Kolmice z bodov  $D$  a  $C$  na priamku  $AE$  pretínajú priamku  $AB$  postupne v bodoch  $K$  a  $L$ . Dokážte, že bod  $L$  je stredom úsečky  $KB$ .

6. Rozhodnite, či existuje prvočíslo  $p$  také, že  $7p + 3^p - 4$  je druhou mocninou celého čísla. Pozri kapitolu 4.6 v zbierke KMS ([http://www.kms.sk/docs/zbierkaKMS\\_klikacia.pdf](http://www.kms.sk/docs/zbierkaKMS_klikacia.pdf)).

# 2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **26. 11. 2012**

1. a) Rozhodnite, či sa nejaké prvočíslo dá napísať ako súčet aspoň troch po sebe idúcich kladných celých čísel.  
b) Dokážte, že každé nepárne prvočíslo sa dá práve dvomi spôsobmi zapísať ako súčet aspoň troch po sebe idúcich celých čísel.
2. Dokážte, že z ľubovoľných 50 navzájom rôznych prvočísel je vždy možné vybrať 13 prvočísel tak, že rozdiel každých dvoch z nich je deliteľný piatimi.
3. V trojuholníku  $ABC$  stredná prieka rovnobežná so stranou  $AB$  pretína výšky trojuholníka  $ABC$  vedené z bodov  $A$  a  $B$  postupne v bodoch  $D$  a  $E$ . Stredná prieka rovnobežná so stranou  $AC$  pretína výšky trojuholníka  $ABC$  vedené z bodov  $A$  a  $C$  postupne v bodoch  $F$  a  $G$ . (Výšky berieme ako priamky.) Dokážte, že priamky  $DC$ ,  $BF$  a  $GE$  sú rovnobežné.
4. Abeceda v marfánskom jazyku sa skladá z písmen  $A$  a  $O$ . Každé dve slová rovnakej dĺžky sa od seba líšia aspoň na troch miestach. Dokážte, že počet slov dĺžky  $n$  nie je väčší ako  $2^n/(n+1)$ .
5. V danom nerovnostrannom trojuholníku  $ABC$  pre dĺžky strán platí  $a+c=2b$ . Označme  $I$  stred vpísanej a  $O$  stred opísanej kružnice trojuholníka  $ABC$ .  
a) Označme  $K$  priesečník priamok  $AC$  a  $BI$ . Body  $D$  a  $E$  sú stredmi strán  $BC$  a  $AB$  (v tomto poradí). Dokážte, že  $I$  je stredom opísanej kružnice trojuholníka  $DKE$ .  
b) Dokážte, že priamky  $OI$  a  $BI$  sú na seba kolmé.
6. Nájdite najmenšie reálne číslo  $K$  také, že nerovnosť

$$a^2 + b^2 + c^2 < K$$

platí pre každú trojicu reálnych čísel  $a, b, c$  takú, že  $a, b, c$  sú dĺžky strán trojuholníka s obvodom 1.

Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás cez e-mail [strom@strom.sk](mailto:strom@strom.sk).

## Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach
- Agentúre na podporu výskumu a vývoja prostredníctvom projektu:  
LPP-0057-09 Rozvíjanie talentu prostredníctvom korešpondenčných seminárov a súťaží

<b>Názov</b>	<b>STROM</b> – korešpondenčný matematický seminár Číslo 1 • September 2012 • Zimný semester 37. ročníka (2012/2013)
<b>Internet:</b>	<a href="http://seminar.strom.sk">http://seminar.strom.sk</a>
<b>E-mail:</b>	<a href="mailto:strom@strom.sk">strom@strom.sk</a>
<b>Vydáva:</b>	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
<b>Internet:</b>	<a href="http://www.strom.sk">http://www.strom.sk</a>
<b>E-mail:</b>	<a href="mailto:zdruzenie@strom.sk">zdruzenie@strom.sk</a>