STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahojte!

Ako skúsení **STROM**-áci isto viete, že stromy sú živé organizmy, ktoré sa časom menia a prechádzajú svojimi obdobiami. Práve teraz sa nachádzajú v období asi najkrajšom – sú celé obsypané mladými, zväčša ružovkastými pukmi.
Tak je to aj s naším **STROM**-om. Nazvať však jeho riešiteľov pukmi by mohlo znieť trochu hanlivo a ružovkastými púčikmi zas trošku detinsky.
Ostaneme preto radšej pri tom, že sme na Vás všetkých hrdí. **STROM** by bez Vás nikdy nevyzeral tak pôvabne, ako je tomu teraz. Týmto posledným číslom (končiacim letnú sériu) by sme Vám chceli zaželať krásne prázdniny. Nech sú plné vody, slnka, morských ježkov, medúz a pľuzgierov :-). Nech objavujete nové miesta, spoznáte veľa nových ľudí. Len si pritom dávajte pozor na seba a na bomby v batožine :-).
Na mnohých z Vás sa tešíme na sústredku v čase, keď už puky stromov dávno pominú, lístie zhnedne a poopadáva. V tom období sa vrátime so zimnou sériou. Dúfame, že sa všetci zapojíte, lebo každý strom sa mení, a tento náš meníte vy.
Do-lístie-opadávania! Vaši **STROM**isti

Riešenia 2. série úloh letného semestra 34. ročníka

1. Marek navrhol Tomášovi, aby si vybral nejaké trojciferné číslo $\overline{abc}$. Potom ho požiadal, aby mu povedal súčet čísel $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ a $\overline{cba}$. Vie Marek vždy z tohto súčtu zistiť, ktoré číslo si Tomáš vybral? Svoju odpoveď podrobne zdôvodnite.
(Symbolom $\overline{xyz}$ označujeme pozičný zápis čísla v desiatkovej sústave, teda z označuje cifru na mieste jednotiek, y na mieste desiatok a x na mieste stoviek.)

Opravovali: Miška Vrbjarová a Jakub Sedlák **Počet riešiteľov: 37**

Riešenie:

Dôkaz urobíme sporom. Predpokladajme teda, že existujú dve rôzne čísla $\overline{abc}$ a $\overline{xyz}$, pričom

$$\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}=\overline{xzy}+\overline{yxz}+\overline{yzx}+\overline{zxy}+\overline{zyx}. \tag{1}$$

Jednoduchým rozpísaním pozičného zápisu v desiatkovej sústave a upravením vieme dokázať rovnosti

$$\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}=222\cdot(a+b+c)$$
$$\overline{xyz}+\overline{xzy}+\overline{yxz}+\overline{yzx}+\overline{zxy}+\overline{zyx}=222\cdot(x+y+z).$$

Ich využitím vieme potom rovnicu (1) upraviť na tvar

$$222\cdot(a+b+c)-\overline{abc}=222\cdot(x+y+z)-\overline{xyz}. \tag{2}$$

Poďme teraz túto rovnicu postupne upravovať:

$$222\cdot(a+b+c)-100a-10b-c=222\cdot(x+y+z)-100x-10y-z$$
$$122a+212b+221c=122x+212y+221z$$
$$122\cdot(a-x)+212\cdot(b-y)+221\cdot(c-z)=0$$

Správnou cestou je teraz si začať všímať deliteľnosť číslom 9. Pravá strana rovnice je deliteľná 9, takže musí byť aj ľavá strana, čiže výraz $122\cdot(a-x)+212\cdot(b-y)+221\cdot(c-z)$. Tento výraz vieme upraviť:

$122\cdot(a-x)+212\cdot(b-y)+221\cdot(c-z)=122\cdot(a-x)+122\cdot(b-y)+122\cdot(c-z)+90\cdot(b-y)+99\cdot(c-z)=$ $122\cdot[(a+b+c)-(x+y+z)]+9\cdot[10\cdot(b-y)+11\cdot(c-z)]$.

Keďže zrejme 9 delí výraz $9\cdot[10\cdot(b-y)+11\cdot(c-z)]$, tak musí deliť aj výraz $122\cdot[(a+b+c)-(x+y+z)]$, čo vzhľadom k nesúdeliteľnosti čísel 9 a 122 znamená, že 9 delí aj $(a+b+c)-(x+y+z)$.
Pokiaľ $(a+b+c)-(x+y+z)=0$, tak z rovnosti (2) dostaneme $\overline{abc}=\overline{xyz}$, čo je spor s predpokladom, že tieto dve čísla sú rôzne.
Na druhej strane ak $(a+b+c)-(x+y+z)\neq 0$, tak z deliteľnosti 9 vieme $|(a+b+c)-(x+y+z)|\geq 9$. Tým pádom podľa vzťahu (2) dostaneme

$$|\overline{abc}-\overline{xyz}|=222\cdot|(a+b+c)-(x+y+z)|\geq 222\cdot 9=1998.$$

To je spor, keďže rozdiel dvoch kladných trojciferných čísel nemôže byť číslo aspoň štvorciferné.

2. Dvaja hráči, Mazo a Jakub, striedavo píšu na tabuľu usporiadané dvojice nezáporných celých čísel; začína Mazo. Ak chce niekto napísať na tabuľu dvojicu (a, b), musí pre ľubovoľnú už napísanú dvojicu (c, d) platiť $a < c$ alebo $b < d$. Prehráva hráč, ktorý je donútený napísať na tabuľu dvojicu $(0, 0)$.
a) Ukážte, že takáto hra vždy skončí po konečnom počte ťahov, bez ohľadu na to, ako Mazo s Jakubom hrajú.
b) Nájdite a popíšte víťaznú stratégiu pre jedného z hráčov.
(*Víťazná stratégia* je postup, ktorý zabezpečí hráčovi výhru pri akejkoľvek hre protihráča. Samozrejme, pri popise tohto postupu treba brať ťahy protihráča do úvahy.)

Opravovali: Robo Tóth a Marek Derňár **Počet riešiteľov: 33**

<u>**Riešenie:**</u>

a) Dôkaz urobíme sporom. Predpoklad máme teda, že hra trvá nekonečne dlho.
Napíšeme všetky ťahy za sebou do nekonečného radu (o.k., napíše to za nás Chuck Norris :-D) ako usporiadané dvojice. Označme si najmenšie použité prvé číslo v tejto postupnosti x_1 a rovnakým spôsobom najmenšie druhé číslo y_1 (keďže môžeme písať iba prirodzené čísla, resp. 0, tak určite najmenšie napísané číslo existuje). Nech im prislúchajú nejaké ťahy $[x_1, y]$ a $[x, y_1]$.

Keďže postupnosť je nekonečná, tak za týmito dvomi ťahmi je stále nekonečne veľa členov. Avšak každá usporiadaná dvojica $[a, b]$ napísaná za nimi musí spĺňať podmienky:

1. $a \geq x_1$ (keďže x_1 je najmenšie prvé) a teda aby boli splnené podmienky pre ťah, tak $b < y$ (kvôli dvojici $[x_1, y]$, čiže podmienke $a < x_1$ alebo $b < y$)

2. $b \geq y_1$ (keďže y_1 je najmenšie druhé) a teda aby boli splnené podmienky pre ťah, tak $a < x$ (kvôli dvojici $[x, y_1]$, čiže podmienke $a < x$ alebo $b < y_1$)

Teda pre týchto nekonečne veľa usporiadaných dvojíc $[a, b]$ platí $x_1 \leq a < x$ a $y_1 \leq b < y$. Takýchto je však len konečne veľa. Zrejme však na tabuľu nemôžeme napísať dve rovnaké čísla, čiže sme dostali spor s podmienkou, že je ich nekonečne veľa.

<u>Iné riešenie:</u>

Načrtneme aj iný možný postup, ktorý vedie k správnemu riešeniu. Na začiatku nech napíše prvý hráč číslo $[a, b]$ a druhý $[c, d]$, pričom $c < a$ alebo $d < b$. Podobným spôsobom ako pri prvom riešení potom vieme dokázať, že po konečnom počte ťahov musí niekto napísať dvojicu $[e, f]$, pričom $e < \min(a, c)$ alebo $f < \min(b, d)$. Inak povedané „niektorá súradnica nadobudne nové minimum“. Potom po konečnom počte ťahov sa opäť minimum niektorej súradnice zmenší, atď. Keďže tieto „súradnice“ nesmú klesnúť pod nulu, tak po konečnom počte ťahov sa budú musieť obidve znížiť na 0. Tým pádom niektorí z hráčov napísal $[0, 0]$, čím sa hra skončila.

b) Víťazná stratégia pre prvého hráča (Maza): V prvom ťahu dá $[1, 1]$. Jakub môže odpovedať iba ťahom $[0, x]$, respektíve $[x, 0]$ (x je nejaké prirodzené číslo). Mazo potom odpovie zrkadlovým ťahom, t.j. $[x, 0]$, respektíve $[0, x]$.
Jakub musí zahrať ťah $[x - k, 0]$ alebo $[0, x - k]$ ($k < x$), na čo Mazo opäť odpovie zrkadlovo.
Takto hra pokračuje ďalej, čiže Jakub musí tú nenulovú súradnicu znižovať a Mazo po ňom môže iba „zrkadlovo opakovať“ ťahy. Je jasné, že po konečnom počte krokov bude musieť Jakub napísať [0,0], čím prehral.

Komentár: V prvom rade by sme Vám chceli poradiť ako sa dá dobre popasovať s úlohami tohto typu. Ak sa dá, pokúste sa situáciu nakresliť a skúmať hru v obrázku. Mnohokrát je potom oveľa ľahšie vidieť do štruktúry problému.
Napríklad táto úloha sa veľmi ľahko dala nakresliť ako prvý kvadrant súradnicovej sústavy. Ťah by bol potom interpretovaný bodom s x-ovou a y-ovou súradnicou. Zároveň ťahy, ktoré už možné neboli,

boli jednoducho začiernená štvrťrovina s vrcholom v tomto bode. Veríme, že pre mnohých z Vás by riešenie tejto úlohy bolo oveľa jednoduchším, keby si ju predstavili týmto alebo podobným grafickým spôsobom.
V druhom rade by sme Vás chceli vystríhať pred riešeniami typu: „najhoršie by bolo“, alebo „teraz by určite súper zahral tak“ a podobne. Takéto riešenia takmer nikdy nie sú ohodnotené plným počtom bodov, keďže korektne dokázať to, že je daná možnosť naozaj „najhoršia“, býva obvykle ťažšie ako vyriešiť pôvodnú úlohu. Niekedy je naozaj ťažké nájsť nejaký elegantný spôsob riešenia, ale času máte dosť :-).

3. Daný je rovnostranný trojuholník ABC. Na jeho stranách CA, AB, BC ležia v tomto poradí body M, N a P tak, že uhol CMP je pravý a platí

$$|\sphericalangle CBM| = \frac{1}{2}|\sphericalangle AMN| = \frac{1}{3}|\sphericalangle BNP|.$$

a) Dokážte, že trojuholník NMB je rovnoramenný.
b) Zistite veľkosť uhla CBM.

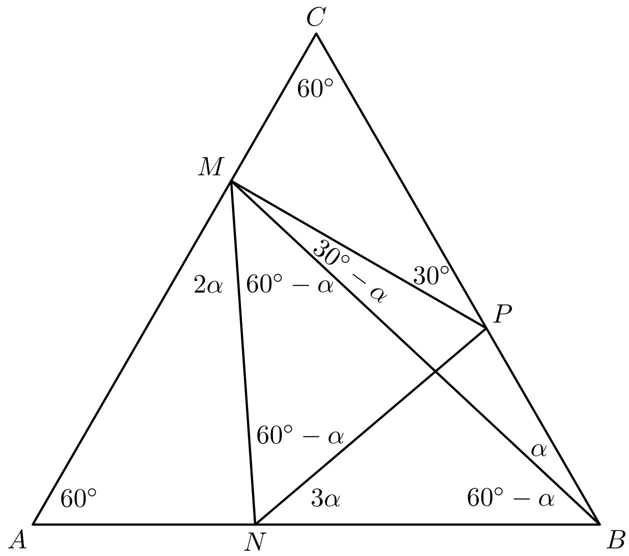
Opravoval: Janka Baranová a Feri Kardoš **Počet riešiteľov: 37**

__**Riešenie:**__

Časť a) nebola náročná, každý kto správne začal i správne skončil. Stačilo si načrtnúť obrázok a povyjadrovať tie správne uhly. Využiť bolo potrebné len dva poznatky, a to že súčet uhlov v trojuholníku je 180°, a že priamy uhol je tiež 180°.

Označme $|\sphericalangle CBM| = \alpha$, potom podľa zadania

$$|\sphericalangle AMN| = 2\alpha \quad \text{a} \quad |\sphericalangle BNP| = 3\alpha.$$



Ako prvé hneď vieme, že $|\sphericalangle NMB| = 60° - \alpha$ (keďže trojuholník ABC je rovnostranný).
Z trojuholníka BCM si vieme vyjadriť $|\sphericalangle CMB| = 120° - \alpha$. Potom vieme, že uhol AMC je priamy, keďže bod M leží na strane AC, teda vieme uhol NMB dopočítať do 180°, takže $|\sphericalangle NMB| = 60° - \alpha$. Vidíme, že

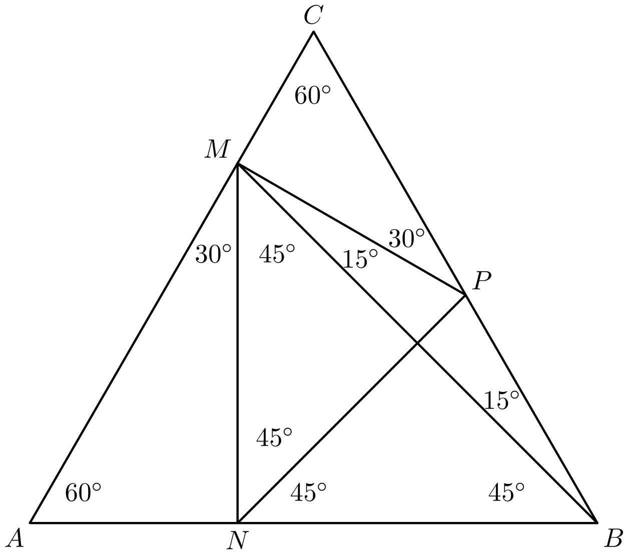
$$|\sphericalangle NBM| = |\sphericalangle NMB| = 60° - \alpha,$$

preto je trojuholník MNB rovnoramenný.
Za povšimnutie stojí fakt, že sme pri riešení nikde nevyužili to, že $|\sphericalangle BNP| = 3\alpha$, ani to, že $|\sphericalangle CMP| = 90°$.

V časti b) ukážeme, že uhol α môže mať len hodnotu 15°. Je zrejmé, že keď si zvolíme nejakú konkrétnu hodnotu uhla $\alpha = |\sphericalangle CBM|$, tak poloha bodov M, N a P je jednoznačne určená podmienkami

$$|\sphericalangle AMN| = 2\alpha \quad \text{a} \quad |\sphericalangle BNP| = 3\alpha.$$

Podmienka $|\sphericalangle CMP| = 90°$ je teda informácia navyše, ktorá by mala pomôcť určiť hodnotu uhla α.



Nech $|\sphericalangle CMP = 90°$. Potom v trojuholníku CMP vieme dopočítať $|\sphericalangle MPC| = 30°$, a pri bode P dostávame $|\sphericalangle MPB| = 150°$. V trojuholníku BMP je potom $|\sphericalangle PMB| = 30° - \alpha$.
Pozrime sa bližšie na trojuholník BMP. Jedným z dôsledkov sínusovej vety je fakt, že oproti väčšiemu uhlu je vždy dlhšia strana. Preto platí

$$|MP| < |PB| \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 30° - \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 15°.$$

Pozrime sa teraz bližšie na trojuholníky MNP a BNP. V prvej časti úlohy sme dokázali, že trojuholník MNB je rovnoramenný, preto $|MN| = |BN|$. Trojuholníky MNP a BNP majú preto dve zodpovedajúce si strany rovnako dlhé. Dĺžka tretej strany, MP, resp. PB, závisí od veľkosti uhla oproti nej. V trojuholníku BNP tento uhol poznáme, jeho veľkosť je 3α; v trojuholníku MNP vieme uhol pri vrchole N dopočítať:

$$|\sphericalangle MNP| = 180° - (120° - 2\alpha) - 3\alpha = 60° - \alpha.$$

Z kosínusovej vety sa dá jednoducho odvodiť, že čím väčší je uhol, ktorý dané dve strany trojuholníka zvierajú, tým väčšia je tretia strana. (Je to dané tým, že vo vyjadrení $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$ sa hodnoty a a b nemenia, zatiaľ čo funkcia kosínus je pre $\gamma \in (0°; 180°)$ klesajúca, t.j. čím väčší uhol γ, tým menšiu hodnotu má $\cos\gamma$.) Preto platí, že

$$|MP| < |PB| \quad \Longleftrightarrow \quad 60° - \alpha < 3\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad 15° < \alpha.$$

Vidíme, že ak $\alpha < 15°$, tak podľa prvého pozorovania platí $|MP| < |PB|$, no potom podľa druhého pozorovania $\alpha > 15°$, čo je spor (a naopak). Preto jediná hodnota uhla α, ktorá nevedie k sporu, je $\alpha = 15°$.
V tomto prípade je $|\sphericalangle BNP| = |\sphericalangle MNP| = 45°$ a $|\sphericalangle PBM| = |\sphericalangle BMP| = 15°$, trojuholníky MNP a BNP sú teda zhodné a trojuholník PMB je rovnoramenný.

Komentár: S prvou časťou úlohy si poradila väčšina z Vás, každý približne rovnakým spôsobom – len postupným povyjadrovaním si uhlov. Druhá časť už bola problémová – dosť z Vás síce prišlo na správny uhol, no nevedeli ste to korektne zdôvodniť, za čo samozrejme museli ísť body dole. Veľmi často sa objavovala nasledovná chybná úvaha:

Označme X priesečník priamok MB a NP. Pozrime sa na trojuholníky MNX a BNX. Vieme, že $|MN| = |BN|$, pretože trojuholník MNB je rovnoramenný. Ďalej vieme, že uhly pri vrcholoch M a B majú oba veľkosť $60° - \alpha$. No a stranu NX majú tieto dva trojuholníky spoločnú, a preto musia byť zhodné. Potom uhol pri vrchole N v týchto dvoch trojuholníkoch musí byť rovnaký, a teda $60° - \alpha = 3\alpha$, čo platí jedine pre $\alpha = 15°$.

Základný problém tohto postupu je, že trojuholníky MNX a BNX nemusia byť zhodné napriek tomu, že majú zhodné dve dvojice strán a jeden uhol. Ak by tomu tak bolo, znamenalo by to, že v každom rovnoramennom trojuholníku ABC so základňou AB pre každý bod X na základni AB platí, že trojuholníky CAX a CBX sú zhodné! Veď predsa majú zhodné veľkosti dvoch strán ($|CA| = |CB|$; stranu CX majú dokonca spoločnú) a jedného uhla ($|\sphericalangle CAX| = |\sphericalangle CBX|$).

Pochvalu (a hlasy) si však zaslúžia tí, ktorí sa s úlohou popasovali, ale aj tí, ktorí sa o to aspoň posnažili. Dúfame, že málo bodov, či zlý pocit z vášho riešenia, Vás prinútilo prečítať si vzorové riešenie, a že ste sa z neho aspoň čo-to nového naučili.

4. Zaoberajme sa reálnymi funkciami f a g, pre ktoré platí

$$f(g(x)) = g(f(x)) = -x \qquad \text{pre každé reálne číslo } x. \qquad (*)$$

a) Nájdite aspoň tri rôzne dvojice vyhovujúcich funkcií f, g.
b) Dokážte, že ak platí $(*)$ pre nejakú dvojicu funkcií f, g, tak obe tieto funkcie sú nepárne.
c) Nech dvojica f, g spĺňa podmienku $(*)$. Dokážte, že ku každému reálnemu číslu b existuje práve jedno reálne číslo a, pre ktoré platí $f(a) = b$. (Funkcia f s touto vlastnosťou sa nazýva *bijektívna.*)
d) Nájdite všetky polynómy f nanajvýš tretieho stupňa, ku ktorým existuje funkcia g tak, aby platil vzťah $(*)$.

Opravovali: Laco Bačo a Tomáš Lučivjanský **Počet riešiteľov: 19**

Riešenie:

a) Na začiatok skúsme, či riešením nie sú nejaké jednoduché funkcie, napr. lineárna funkcia. Dosaďme preto $f(x) = ax$, kde a je nejaké nenulové reálne číslo, do podmienky $(*)$ a dostaneme rovnicu pre funkciu $g(x)$

$$a \cdot g(x) = -x,$$

z ktorej po predelení číslom a dostaneme

$$g(x) = -\frac{x}{a}.$$

Skúškou ľahko overíme, že dvojica funkcií $f(x) = ax$ a $g(x) = -\frac{x}{a}$ $(a \neq 0)$, je naozaj riešením našej úlohy:

$$f(g(x)) = a\left(-\frac{x}{a}\right) = -x$$
$$g(f(x)) = -\frac{ax}{a} = -x.$$

Teraz nám už len stačí dosadiť za a tri rôzne čísla a máme tri rôzne dvojice vyhovujúcich funkcií f a g.

b) Definičným oborom funkcie f sú všetky reálne čísla, preto je f definovaná v bodoch x_0 aj $-x_0$. [1] Označme hodnotu funkcie f v bode x_0 ako y, hodnotu v $-x_0$ ako z, teda $f(x_0) = y$ a $f(-x_0) = z$. Potom z podmienky $(*)$ vieme určiť hodnotu

$$g(y) = g(f(x_0)) = -x_0.$$

Dosaďme teraz za $x = y$ do $(*)$:

$$-y = f(g(y)) = f(-x_0) = z.$$

Dostali sme rovnosť $z = -y$, no y a z iba označujú $f(x_0)$ a $f(-x_0)$, preto

$$f(-x_0) = -f(x_0)$$

pre všetky $x_0 \in \mathbb{R}$. To ale znamená, že f je nepárna funkcia. Rovnakým spôsobom vieme dokázať nepárnosť funkcie g.

c) Chceme ukázať, že funkcia f nadobúda každé reálne číslo práve raz. Jeden zo spôsobov je takýto: ukážeme, že obor hodnôt f je množina reálnych čísel a funkcia f je prostá.[2]
Nech b je ľubovoľné reálne číslo. Uvažujme hodnotu funkcie g v bode $-b$ a položme $a = g(-b)$. Zo

[1] táto podmienka musí nutne platiť, aby funkcia mohla byť podľa definície nepárna
[2] nenadobúda žiadnu hodnotu dvakrát

zadania potom ihneď plynie $f(a) = f(g(-b)) = b$. Preto funkcia f nadobúda každú reálnu hodnotu (číslo b bolo ľubovoľné) a jej oborom hodnôt sú preto všetky reálne čísla, teda $H(f) = \mathbb{R}$.
Sporom teraz ukážeme, že f je prostá.
Nech x_1, x_2 sú dve rôzne reálne čísla pre ktoré platí $f(x_1) = f(x_2) = y$.
Podľa podmienky $(*)$ by malo platiť:

$$x_1 = g(f(x_1)) = g(y) = g(f(x_2)) = x_2,$$

čo je spor s tým, že $x_1 \neq x_2$. Preto f musí v rôznych bodoch nadobúdať rôzne hodnoty a teda f je prostá funkcia.
Ukázali sme, že funkcia f je prostá a jej oborom hodnôt sú všetky reálne čísla, takže f je podľa definície bijektívna.

d) Využijeme poznatok z časti b). Ak je f nepárna, tak $f(0) = -f(0)$, z čoho dostávame $f(0) = 0$. Preto absolútny člen vo vyhovujúcich polynómoch musí byť nulový. Postupne rozoberieme polynómy nultého, prvého, druhého a tretieho stupňa.
Polynóm nultého stupňa je konštantná funkcia, v tomto prípade to teda musí byť funkcia $f(x) = 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Ľahko ale vieme ukázať, že takáto funkcia nevyhovuje podmienke $(*)$.
Polynóm prvého stupňa má vo všeobecnosti tvar $f(x) = ax$, pričom $a \neq 0$. V časti a) sme ukázali, že všetky takéto polynómy vyhovujú zadaniu našej úlohy.
Grafom polynomickej funkcie druhého stupňa je parabola, no žiadna parabola nie je stredovo súmerná podľa bodu $[0,0]$ [3], čo je v spore s tvrdením časti b). Preto žiaden kvadratický polynóm nemôže byť riešením.
Ak zadaniu vyhovuje nejaký kubický polynóm, tak je tvaru $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, pričom $a \neq 0$ (absolútny člen musí byť rovný nule kvôli nepárnosti f). Opäť z nepárnosti dostávame, že pre všetky $x \in \mathbb{R}$ musí platiť:

$$-f(x) = f(-x)$$
$$-\left(ax^3 + bx^2 + cx\right) = a\,(-x)^3 + b\,(-x)^2 + c\,(-x)$$

Úpravou dostaneme $2bx^2 = 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$, čo platí jedine v prípade $b = 0$. Takže hľadaný polynóm 3. stupňa musí mať tvar

$$ax^3 + cx = ax\left(x^2 + \frac{c}{a}\right).$$

Z časti c) vieme, že tento polynóm musí byť prostý, preto môže mať len jeden nulový bod ($x = 0$). Z tohto dôvodu môže byť člen $\left(x^2 + \frac{c}{a}\right)$ rovný nule len pre $x = 0$, a teda $\frac{c}{a}$ musí mať nutne nezápornú hodnotu.
Táto podmienka je ale zároveň aj postačujúcou podmienkou na to, aby bol polynóm $P(x) = ax^3 + cx$ prostý. Ukážme si preto teraz podrobne prečo je to tak.
Nech $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$ a predpokladajme, že pre ne platí $P(x_1) = P(x_2)$. Potom $P(x_1) - P(x_2) = 0$. Po úprave a predelení $a \neq 0$ dostaneme podmienku pre x_1, x_2:

$$\left(x_1^3 - x_2^3\right) + \frac{c}{a}\,(x_1 - x_2) = 0. \qquad (**)$$

Funkcia x^3 je rastúca, preto ak $x_1 > x_2$, tak aj $x_1^3 - x_2^3 > 0$ a $\frac{c}{a}\,(x_1 - x_2) > 0$. To je však spor s $(**)$. Ak $x_1 < x_2$, dostaneme $x_1^3 - x_2^3 < 0$ a $\frac{c}{a}\,(x_1 - x_2) < 0$, čo je však zase spor s $(**)$.
Preto musí byť $x_1 = x_2$, čím sme ale dokázali implikáciu $P(x_1) = P(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. To ale znamená, že polynóm $P(x) = ax(x^2 + \frac{c}{a})$ je prostá funkcia.
Nech je $f(x) = P(x)$. Potom je f prostá a $H(f) = \mathbb{R}$.[4] Preto existuje k funkcii f inverzná funkcia

[3] grafická interpretácia nepárnej funkcie
[4] obor hodnôt polynómov nepárnych stupňov je $\mathbb{R}$

f^{-1}, ktorej definičný obor aj obor hodnôt je $\mathbb{R}$. Položme $g(x) = -f^{-1}(x)$ a skúškou ukážeme, že takáto dvojica f, g vyhovuje zadaniu (využijeme fakt, že f je nepárna):

$$f(g(x)) = f(-f^{-1}(x)) = -f(f^{-1}(x)) = -x$$
$$g(f(x)) = -f^{-1}(f(x)) = -x$$

Záver: vyhovujú všetky funkcie $f(x) = ax$, $a \neq 0$ a $f(x) = ax^3 + cx$, $a \neq 0$, $\frac{c}{a} \geq 0$.

Komentár: Viacerí ste dokazovali časti b), c) iba pre funkcie, ktoré ste našli v časti a). No nemusia to byť všetky funkcie vyhovujúce podmienke $(*)$, preto je vhodné nepredpokladať o funkciách f, g nič viac, ako je zadané. Pri dokazovaní potrebných tvrdení by ste mali vychádzať len z podmienky $(*)$. Tak by ste to dokázali nielen pre mocninové funkcie nepárneho stupňa, ale napr. aj pre takúto dvojicu funkcií, ktorá vyhovuje zadaniu:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ak } x \in \mathbb{Q} \\ 2x & \text{ak } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -x & \text{ak } x \in \mathbb{Q} \\ -\frac{x}{2} & \text{ak } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Konečné poradie Letného semestra 34. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	1.	2.	3.	4.	H	CS
1.	Martin Vodička	Kvinta	GAlejKE	9	9	9	9	9	9	9	9	2	90
2.	Klára Ficková	2. A	GPoštKE	8	9	9	9	9	8	2	8	2	79
3.	Dávid Hvizdoš	3. A	GPoštKE	9	9	9	9	-	9	3	3	1	63
4.	Štěpán Šimsa	Kvinta	GJJLit	9	9	-	2	9	9	5	1	2	62
	Radovan Hnatič	2. A	GPoštKE	5	9	6	9	9	1	2	6	-6	62
6.	Pavol Koprda	Sexta A	GHvieTT	9	9	-	5	9	7	3	-	1	58
	Kristína Faguľová	2. A	GPoštKE	6	8	8	5	7	5	5	1	0	58
	Martina Hlavatá	Septima	GGrösBA	6	9	5	4	8	9	5	2	0	58
	Andrej Kozák	Septima A	GGrösBA	9	9	7	4	9	4	4	1	3	58
10.	Michal Kopf	2. A	GSlezCZ	9	9	7	-	5	9	3	-	0	56
11.	Viktor Szabados	3. B	GGrösBA	9	9	9	-	5	4	6	-	0	55
12.	Vladimír Macko	1. A	GHronZV	7	9	2	4	7	8	-	-	0	54
13.	Monika Zlaczka	3. A	GPoštKE	9	9	6	4	6	4	4	1	0	53
14.	Matúš Stehlík	Septima	GAlejKE	9	9	7	5	9	4	-	1	0	52
15.	Jakub Šafin	1. G	GMasaMI	8	-	9	9	5	2	3	1	0	51
16.	Peter Milošovič	3. A	GPoštKE	9	9	6	4	7	2	3	2	1	50
17.	Katarína Krajčiová	Tercia	GAlejKE	-	9	9	-	3	-	9	-	6	48
18.	Alžbeta Bohiniková	Septima	GGrösBA	2	3	9	3	9	6	5	-	0	45
19.	Denisa Semanišinová	Kvinta	GAlejKE	8	3	8	-	4	4	3	2	1	44
20.	Jaroslav Petrucha	Kvinta	GMetoBA	7	8	-	5	-	7	-	-	0	42
21.	Tomáš Babej	3. A	GPoštKE	-	9	-	-	9	9	4	5	0	41
22.	Petra Zibrínová	3. A	GMudrPO	6	-	7	5	4	3	5	2	1	40
23.	Miroslav Stankovič	9. A	ZKro4KE	5	9	7	2	-	3	-	-	0	38
24.	Denisa Múthová	3. A	GRužiŽA	5	5	3	-	5	6	4	2	0	37
25.	Miloslav Homer	2. A	GPoštKE	6	-	5	4	0	8	3	1	0	35
26.	Martin Rapavý	Kvarta A	GAlejKE	7	8	2	-	3	-	3	-	0	34

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	1.	2.	3.	4.	H	CS
	Miroslava Vašková	3. A	GMudrPO	5	5	6	5	4	1	2	-	-6	34
28.	Barbora Marečáková	Sexta	GKukuPP	4	3	-	-	9	4	2	-	0	29
	Zuzana Baxová	2. E	G1májTN	5	9	-	-	2	4	2	-	0	29
	Ján Jursa	9. A	ZKro4KE	3	0	2	-	4	7	3	-	0	29
31.	Alexandra Pistráková	2. A	GPoštKE	4	-	8	-	3	-	5	-	0	27
32.	Ivana Gašková	Sexta	GAlejKE	5	5	-	5	1	-	3	1	0	26
	Lucia Magurová	1. A	GPoštKE	-	-	8	-	-	-	5	-	0	26
34.	Dorota Jarošová	Tercia	GAlejKE	4	8	-	-	2	-	-	-	0	24
	Róbert Solárik	1. A	GPoštKE	9	-	6	-	-	-	-	-	0	24
36.	Dáša Krasnayová	Septima	GAlejKE	8	-	-	1	4	4	3	-	0	23
	Ladislav Hovan	3. A	GExnáKE	8	2	7	3	-	-	-	-	0	23
38.	Daniela Harčarufková	2. A	GPoštKE	6	-	2	5	-	-	-	-	0	18
39.	Veronika Koľveková	2. A	GPoštKE	4	-	-	6	-	-	3	-	0	17
40.	Dávid Lupták	1. F	GTajoBB	0	0	4	-	2	1	2	-	0	15
	Michaela Belanová	Sexta	GTeplBA	7	-	4	-	-	-	-	-	0	15
42.	Katarína Révészová	3. A	GPoštKE	-	-	-	-	4	2	5	-	0	13
43.	Ján Dudič	1. A	GPoštKE	4	-	-	-	-	-	2	-	0	12
44.	Daniel Till	2. A	GPoštKE	-	-	-	-	4	1	3	-	0	11
45.	Michal Anderle	Septima	GHaliLC	9	-	-	-	-	-	-	-	0	9
46.	Veronika Vlčková	Septima	GOkruZV	5	-	3	-	-	-	-	-	0	8
47.	Nikola Daubnerová	3. C	GKomeSY	-	-	-	-	1	1	3	1	0	7
	Štefánia Klimová	Kvinta	GSNPGL	3	-	1	-	-	-	-	-	0	7
49.	Matej Makuch	3. F	GTajoBB	-	-	-	-	4	2	-	-	0	6
50.	Ivana Sopatová	1. A	GPoštKE	-	-	2	-	-	-	-	-	0	4
	Martin Búlik	3. F	GTajoBB	-	-	-	-	-	2	2	-	0	4

Pohár konštruktérov Letného semestra 34. ročníka

P.	Skratka	Škola	P.r.	Body
1.	GPoštKE	Gymnázium Poštová 9 042 52 Košice	17	593
2.	GAlejKE	Gymnázium Alejová 1 041 49 Košice	8	341
3.	GGrösBA	Gymnázium Grösslingova 18 811 09 Bratislava 1	4	216
4.	GMudrPO	Gymnázium J. A. Raymana Mudroňova 20 080 01 Prešov	2	74
5.	ZKro4KE	Základná škola Krosnianska 4 040 22 Košice	2	67
6.	GJJLit	Gymnázium Josefa Jungmanna Svojsíkova 1 412 65 Litoměřice	1	62
7.	GHvieTT	Gymnázium Angely Merici Hviezdoslavova 10 917 01 Trnava	1	58
8.	GSlezCZ	Slezské Gymnázium Zámecký okruh 29 746 01 Opava	1	56
9.	GHronZV	Gymnázium Hronská 1467/3 960 01 Zvolen	1	54
10.	GMasaMI	Gymnázium Pavla Horova Masarykova 1 071 79 Michalovce	1	51
11.	GMetoBA	Gymnázium Metodova 2 821 08 Bratislava 2	1	42
12.	GRužiŽA	Gymnázium bilingválne T. Ružičku 3 010 01 Žilina	1	37
13.	G1májTN	Gymnázium 1. mája 2 911 01 Trenčín	1	29
	GKukuPP	Gymnázium Kukučínova 058 39 Poprad	1	29
15.	GTajoBB	Gymnázium J. G. Tajovského 25 974 01 Banská Bystrica	3	25
16.	GExnáKE	Gymnázium Exnárova 10 040 22 Košice	1	23
17.	GTeplBA	Gymnázium Teplická 7 831 02 Bratislava 3	1	15
18.	GHaliLC	Gymnázium Haličská cesta 9 984 03 Lučenec	1	9
19.	GOkruZV	Gymnázium Okružná 2469 960 01 Zvolen	1	8
20.	GKomeSY	Gymnázium bilingválne Komenského 215 038 52 Sučany	1	7
	GSNPGL	Gymnázium SNP 1 056 80 Gelnica	1	7

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach
- Agentúre na podporu výskumu a vývoja prostredníctvom projektu:
  LPP-0057-09 Rozvíjanie talentu prostredníctvom korešpondenčných seminárov a súťaží

Názov	**STROM** – korešpondenčný matematický seminár
	Číslo 5 • Máj 2010 • Letný semester 34. ročníka (2009/2010)
Internet:	`http://seminar.strom.sk`
E-mail:	`strom@strom.sk`
Vydáva:	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet:	`http://www.strom.sk`
E-mail:	`zdruzenie@strom.sk`