STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Milí naši riešitelia,

Po dvoch sériach sú tu Vianoce a aj koniec zimného semestra 32. ročníka vášho – nášho milovaného **STROM**u. Aj keď zima klope spolu s Vianocami na oblôčik, **STROM**nezamrzol a žije ďalej. Dokonca pre vás pripravil i veľké vianočné stretnutie ináč nazývané Vianočný Maxiklub. Uskutočni sa 22. decembra na Prírodovedeckej fakulte, na Jesennej 5 v Košic iach v miestnosti P/12 v čase 13.00 – 17.00. Príď! Stretneš tam vedúcich (bývalých aj súčasných), riešiteľov a priateľov **STROM**u.

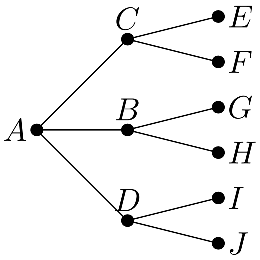
Riešenia 1. série úloh zimného semestra 32. ročníka

1. V krajine **STROM**ovo je každé mesto spojené leteckými linkami s nanajvýš tromi inými mestami. Všetky letecké linky sú obojsmerné. Z ľubovoľného mesta sa vieme do ľubovoľného iného mesta dostať lietadlom s nanajvýš jedným prestupom. Koľko najviac miest môže byť v tejto krajine? *Ak si myslíte, že správna odpoveď je* 325, *Vaše riešenie by malo obsahovať nielen ukážku toho, že* 325 *miest je možných, ale aj zdôvodnenie, že viac miest byť v krajine nemôže.*

Opravoval: Robko Hajduk **Počet riešiteľov: 38**

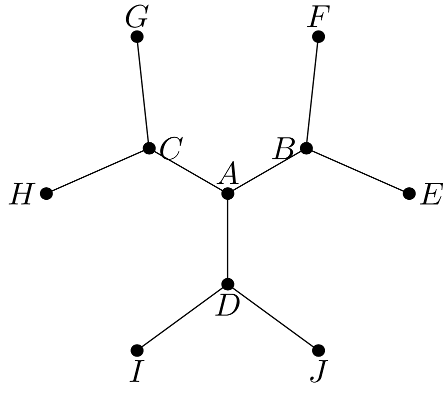
<u>**Riešenie:**</u>

Úlohu si rozdeľme na dve časti. V prvej nájdeme maximálny počet miest ktoré by mohli vyhovovať zadaniu úlohy. V druhej časti sa pokúsime nájsť zakreslenie miest a liniek medzi nimi, a teda dokázať, že naozaj to pre nami nájdenú maximálnu hodnotu platí.



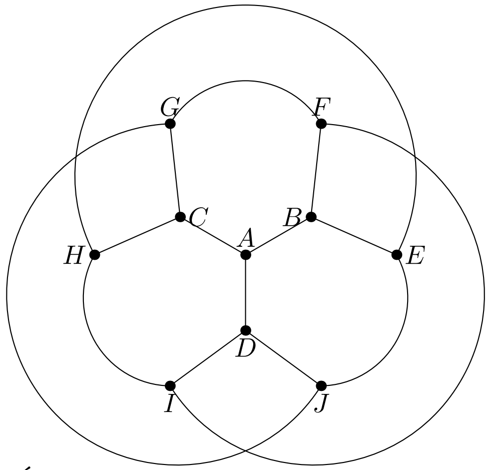
Začnime jedným mestom, mestom A. V zadaní máme napísané, že každé mesto je spojené s nanajvýš troma mestami, takže počet miest do ktorých sa vieme z mesta A dostať bez prestupu, je najviac 3. Označme si ich B, C, D (ak existujú). Z každého z miest B, C, D vedú ešte najviac dve linky (obr. 1). Preto počet miest, do ktorých sa vieme z mesta A dostať na práve jeden prestup je najviac 6.

Na druhej strane, podľa zadania sa do každého mesta z mesta A vieme dostať s nanajvýš jednym prestupom, takže žiadne iné mestá v **STROM**ove nie sú. Takže maximálny počet miest, ktorý môže vyhovovať zadaniu úlohy (ešte sme neukázali, že aj vyhovuje) je 10.



Tak a teraz hor sa do nájdenia vhodného rozplánovania leteckých liniek. Vychádzajme z obrázka, ktorým sme popisovali maximálny počet miest, len si ho načrtneme trocha ináč (obr. 2). Ako vieme, chýbajú nám spojenia na maximálne jeden prestup z mesta E do miest G, H, I a J, z mesta F do miest G, H, I a J, z mesta G do miest I a J a z mesta H do miest I a J. Z každého mesta nám ostávajú na spojenie ešte dve linky. Z každého mesta sa vlastne potrebujem dostať do 4 miest. Takže do dvoch sa dostanem priamo a do dvoch s jedným prestupom. No a teraz nám už nezostáva nič iné len si to nakresliť.

Výsledkom je napríklad takéto rozdelenie leteckých liniek na obrázku 3. Popíšme si, v tabuľke, či spĺňa zadanie úlohy. Teda či sa dá dostať z každého mesta do iného mesta priamo alebo na jeden prestup. Vzhľadom k symetrickosti grafu nám postačí overiť platnosť pre mestá A, D, I a J.



Mesto	priama linka	jeden prestup
A	B, C, D	E, F, G, H, I, J
D	A, I, J	B, C, E, F, G, H
I	D, F, H	A, B, C, E, G, J
J	D, E, G	A, B, C, F, H, I

Tak a hotovo. Pre 10 miest existuje rozloženie leteckých liniek, spĺňajúce podmienky zadania úlohy.

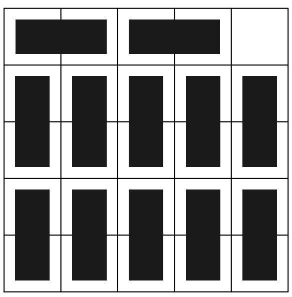
Komentár: Skoro každý, kto sa do úlohy pustil, si ju rozdelil na dve časti (tak ako v riešení napísanom vyššie): dokázať že 10 je maximum a potom nájsť ako majú byť zorganizované letecké spojenia pre 10 miest. Kto sa do toho pustil takto, mal správne riešenie. Teda skoro správne mal každý, avšak niektorí z vás spravili len nákres a to, aby popísali, že to je naozaj správne riešenie, na to zabudli. Žiaľ šli za to body dole, a pritom stačilo tak málo.

2. Danka a Janka hrajú na šachovnici s veľkosťou 5×5 hru, pri ktorej sa striedajú v ťahoch. Tá, ktorá je na ťahu, zakryje dve ešte nezakryté políčka šachovnice kúskom domina veľkosti 2×1 (resp. 1×2). Prehráva hráčka, ktorá nemôže urobiť ťah. Pod dĺžkou (ukončenej) hry rozumieme počet ťahov, ktoré sa uskutočnili. Aká najdlhšia a aká najkratšia hra sa dá zahrať pri takýchto pravidlách?
Nezabudnite uviesť okrem príkladu najdlhšej hry aj dôvody, pre ktoré žiadna iná hra nemôže byť dlhšia. Podobne pre najkratšiu možnú hru.

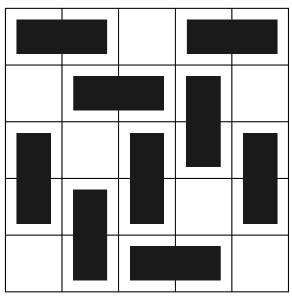
Opravovali: Marek Derňar a Feri Kardoš **Počet riešiteľov: 38**

Riešenie:

V prvej časti tejto úlohy sa budeme zaoberať najdlhšou hrou. Hra mohla trvať najviac 12 ťahov. To, že nemohla mať viac ako 12 ťahov jednoducho dokážeme sporom. Predpokladajme, že by existovala hra, ktorá by mala minimálne 13 ťahov. Keďže každé domino zaberá 2 políčka, tak by museli dominá zaberať minimálne $13 \times 2 = 26$ políčok. Ale šachovnica 5×5 ich obsahuje iba 25, čo je spor. Ešte však by sme mali dokázať, že hra mohla mať 12 ťahov. Čiže načrtneme si príklad takejto hry (obrázok 1). Táto časť vám nerobila väčšie problémy a v podstate ju mal každý správne.



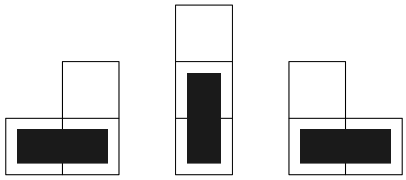
Obr. 1



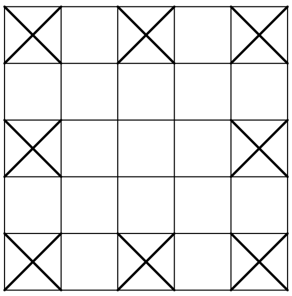
Obr. 2

Teraz prejdime ku druhej časti úlohy. V nej sa budeme zaoberať najkratšou hrou. Každý z vás prišiel na to, že hra by mohla trvať najmenej 9 ťahov. Príklad takejto hry je na obrázku číslo 2. O dosť horšie to už však bolo s korektným zdôvodnením, že hra by nemohla skončiť aj po menej ťahoch. Mnoho riešiteľov spomínalo vo svojich riešeniach najvýhodnejšie zapĺňanie. Bohužiaľ nie vždy to, čo sa nám zdá najvýhodnejším, ním aj bude. Pri podobných úlohách musíme dokázať, že pre ľubovoľné umiestňovanie domín hra bude trvať najmenej 9 ťahov. To môžeme dosiahnuť napríklad vypísaním

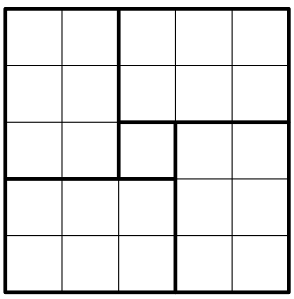
(nakreslením) úplne všetkých možností. Tých možností je však strašne veľa, čiže by sme takmer určite aspoň na jednu z nich zabudli. A pravdupovediac komu by sa to všetko chcelo robiť? : Preto sa pokúsime nájsť nejakú fintu, ktorou sa nám počet možností výrazne zníži.
Takže chceme dokázať, že hra nemohla trvať menej ako 9 ťahov. Dokážeme to sporom. Predpokladajme, že existuje hra, ktorá má menej ako 9 ťahov, čiže 8 alebo menej ťahov. Potom, keďže každé domino zaberá 2 políčka a šachovnica ich obsahuje 25, tak musí ostať minimálne $25 - 2.8 = 9$ neobsadených políčok. Pričom žiadne dve z týchto voľných políčok nesmú mať spoločnú stranu, inak by sme namiesto nich vedeli dať domino.
Teraz si ukážeme 3 rôzne postupy ako dosiahnuť spor s našim predpokladom:
1. postup:
Pod každým voľným políčkom (okrem tých na spodnom riadku) sa musí nachádzať domino umiestnené jedným z týchto troch spôsobov:



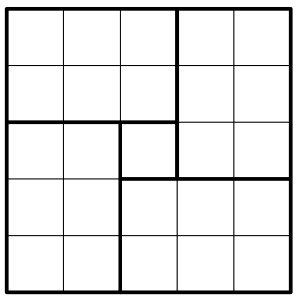
V žiadnom z týchto spôsobov sa nad daným dominom nenachádzajú dve rôzne voľné políčka. Čiže každému voľnému políčku priradíme domino, ktoré sa nachádza presne pod ním. Rôznym neobsadeným políčkam sme priradili rôzne dominá. Nepriradili sme však žiadne domino voľným políčkam nachádzajúcich sa v najspodnejšom riadku. Okrem toho na políčku $a5$ alebo $b5$ (podľa šachovej notácie) sa musí nachádzať domino, ktoré sme však nepriradili žiadnemu voľnému políčku. Rovnako aj na políčku $d5$ alebo $e5$ je určite nepriradené domino (iné ako to prvé). Čiže ak máme v najspodnejšom riadku (riadku a podľa šachovej notácie) najviac 2 voľné políčka, tak im priradíme tie 2 zatiaľ nepriradené dominá. Potom každému neobsadenému políčku sme priradili práve 1 voľné domino, čiže ich maximálny počet je $\frac{25}{3}$, čiže je ich určite menej ako 9, čo je spor.



Pokiaľ by v najnižšom riadku boli viac ako 2 voľné políčka, tak tam musia byť 3, keďže je jasné, že v jednom riadku ani stĺpci nemôžu byť viac ako 3 voľné políčka. Potom úplne rovnakú myšlienku vieme použiť aj pre najvrchnejší riadok, respektíve "najľavejší" stĺpec, respektíve "najpravejší" stĺpec (v každom z nich musia byť 3 voľné políčka). Čiže to bude vyzerať ako na obrázku vľavo (krížik označuje voľné políčko).
No a teraz napríklad na políčku b2 sa musia nachádzať 2 rôzne dominá, čo je spor. Čiže vo všetkých možnostiach sme dostali spor, čím sme dokázali, že naozaj je 9 ťahov minimum.
2. postup:
Rozdeľme si šachovnicu 5x5 na 4 šachovnice $2 \times 3 + 1$ políčko, tak ako vidíme na nasledujúcich obrázkoch (č. 3 a 4):

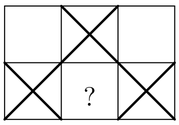


Obr. 3

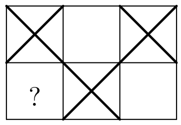


Obr. 4

Je zrejmé, že v ľubovoľnej zo zvýraznených oblastí 2×3 môžu byť maximálne 3 voľné (neobsadené) políčka. Pokiaľ by v niektorej z nich boli 3, tak sú 2 možnosti:

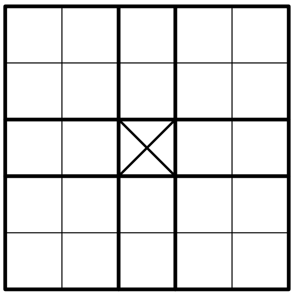


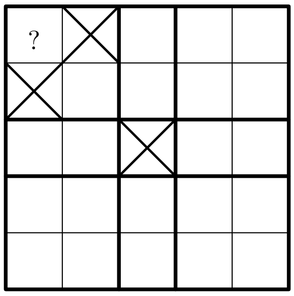
Obr. 5



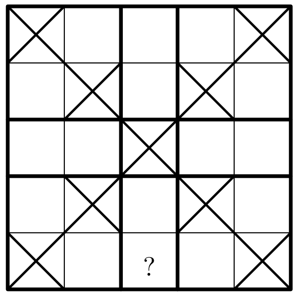
Obr. 6

Keďže dve strany ľubovoľnej z týchto oblastí sú zároveň okrajom šachovnice 5×5, tak ich určite vieme otočiť, alebo osovo súmerne prevrátiť tak, aby to vyzeralo ako na obrázku 5 alebo 6. Potom však na políčko označené otáznikom nevieme umiestniť domino ani voľné políčko, čo je spor.
Čiže sme dokázali, že v ľubovoľnej z vyznačených oblastí môžu byť maximálne 2 voľné políčka. Keďže uvažujeme, že na celej šachovnici 5×5 ich má byť aspoň 9, tak v každej z tých oblastí musia byť presne 2 a v strede šachovnice sa tiež musí nachádzať voľné políčko. Skúsme si teraz obrázky č. 3 a 4 prekryť. Tým nám vznikne niečo takéto (obr. č. 7):


Obr. 7

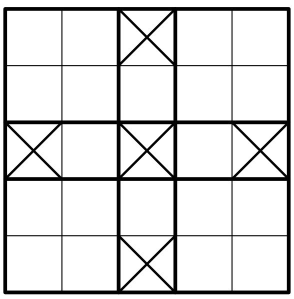


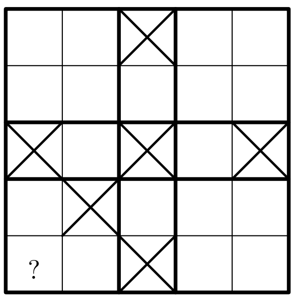
Obr. 8



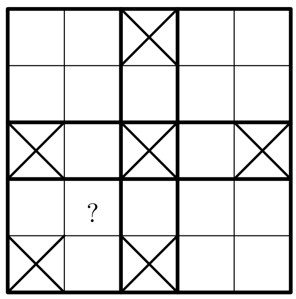
Obr. 9

Keďže v každej z vyznačených oblastí na obrázkoch 3 a 4 musia byť po 2 voľné políčka a obrázok č.7 vznikol ich prekrytím, tak v každej z vyznačených oblastí 2×1 na obr. 7 musí byť rovnako veľa voľných políčok. Pokiaľ by v nich nebolo žiadne voľné políčko, potom vo všetkých vyznačených oblastiach 2x2 musia byť po 2 voľné políčka. Zrejme ich nemôžeme umiestniť tak ako na obr. č 8 (na pole označené otáznikom nemáme čo dať), čiže musia byť rozmiestnené ako na obr. č. 9. Potom však na políčku označenom otáznikom musia byť až 3 dominá, čo je spor.
Keďže sme práve ukázali, že vo vyznačených oblastiach 2x1 sa musí nachádzať aspoň 1 voľné políčko (2 sa tam nachádzať nemôžu), tak tam musí byť práve 1. Potom dostávame takúto situáciu (obr. č. 10):


Obr. 10



Obr. 11



Obr. 12

Potom v každej z vyznačených oblastí 2x2 sa musí nachádzať práve 1 voľné políčko. Môžeme ho umiestniť 2 rôznymi spôsobmi (obr. č. 11 a 12) v každom z nich však na políčko označené otáznikom by sme museli dať 2 dominá, čo je spor.
Čiže vo všetkých možnostiach sme dostali spor, čím sme dokázali, že naozaj je 9 ťahov minimum.
Pri podobných úlohách sa veľmi často využíva myšlienka rozdelenia si šachovnice na menšie časti, v ktorých sa tvrdenie dokazuje o dosť ľahšie (počet možností sa nám razantne zníži).
3. postup:
Pri tomto postupe vám už iba tak zhruba načrtneme, ako sa dala úloha ešte riešiť.
Najprv by sme si zobrali možnosť, ak v 1. riadku sú 3 voľné políčka. Potom by sme si umiestňovali dominá na ich "vynútené" pozície (pozícia na ktorej musí byť domino), rozobrali zopár možností a v každej z nich došli k sporu.

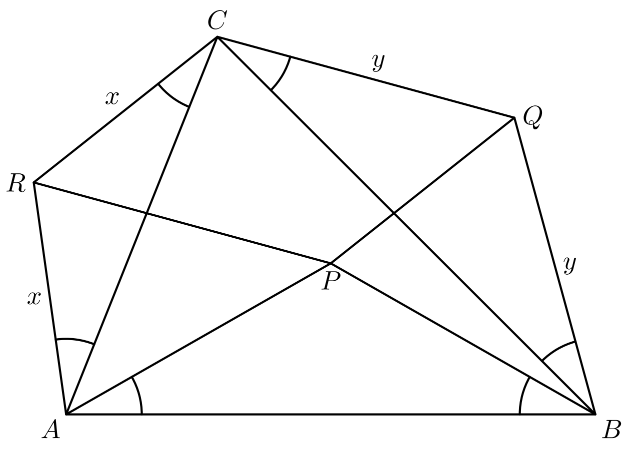
Ďalej by sme si zobrali možnosť, ak v 2. riadku sú 3 voľné políčka. Postupovali by sme pri nej úplne rovnako ako v 1. možnosti a došli k sporu.
Rovnakým spôsobom by sme rozobrali aj možnosť, ak sa nachádzajú v 3. riadku 3 voľné políčka a došli k sporu. Keďže šachovnica je osovo súmerná (podľa osi 3. riadku) a sme dokázali, že v 1., 2., ani v 3. riadku nemôžu byť 3 voľné políčka, tak ani v 4. a 5. riadku nemôžu byť 3 voľné políčka.
Čiže v každom riadku sa nachádzajú maximálne 2 voľné políčka. Keďže je riadkov 5 a dokopy ich má byť minimálne 9, tak v štyroch riadkoch musia byť po 2 voľné políčka a v poslednom 1 alebo 2 voľné políčka. Potom určite v 1. a 2. riadku sú po 2 voľné políčka alebo v 4. a 5. riadku sú 2 voľné políčka. Vzhľadom na súmernosť môžeme uvažovať, že sú v 1. a 2. riadku. Potom rozoberieme všetky 4 možnosti pre ich umiestnenie v 1. riadku a v každej z nich dokážeme, že v 2. riadku je maximálne 1 voľné políčko, čo je spor.
Tým sme rozobrali všetky možnosti a v každej z nich prišli k sporu, čiže hra mohla naozaj prebiehať najmenej 9 ťahov. Tento 3. postup bol použitý vo väčšine správnych riešení.

3. Daný je trojuholník ABC. Uvažujme bod P, ktorý leží v trojuholníku ABC na osi strany AB. K nemu zostrojíme body Q a R ležiace mimo trojuholníka ABC tak, aby trojuholníky BQC a CRA boli podobné s trojuholníkom APB.
a) Nájdite všetky body P také, že body P, Q, C, R ležia na priamke.
b) Predpokladajme, že body P, Q, C, R neležia na priamke. Dokážte, že potom vytvárajú rovnobežník.
V časti a) nestačí len nájsť tieto body. Treba aj zdôvodniť, prečo iné body nevyhovujú.

Opravovali: Mišo Dančo a Feri Kardoš **Počet riešiteľov: 20**

Riešenie:

Uvedieme najprv riešenie časti a), potom riešenie časti b), a potom ešte jedno riešenie časti a), v ktorom sa využívajú myšlienky z riešenia časti b).
a) Skúmajme kedy by mohli body P, Q, R a C ležať na jednej priamke. Preložme bodmi P a C priamku. Ak majú všetky štyri body ležať na jednej priamke, tak to musí byť práve táto priamka. Ukážme, že body Q a R nemôžu oba ležať na priamke PC:



Na ktorej časti priamky PC by mohol bod Q (alebo bod R) ležať? Bod R leží v tej polrovine určenej priamkou AC, v ktorej nie je bod B, takže bod R určite nemôže byť na polpriamke CP. Podobne bod Q zrejme leží v tej polrovine určenej priamkou BC, v ktorej nie je bod A, takže ani bod Q nemôže byť na polpriamke CP.
Jediná zvyšná možnosť je, že oba body Q a R ležia na polpriamke opačnej k polpriamke CP. Mohlo by sa to stať? Ak by oba body Q a R ležali na tejto polpriamke, tak súčet uhlov RCA, ACB a BCQ by musel byť 360°. Ukážeme, že toto nemôže nikdy nastať:
Uhol ACB je vnútorný uhol trojuholníka ABC, takže jeho veľkosť je určite menšia ako 180°. Ako odhadnúť veľkosť uhlov RCA a BCQ? Skúsme si pomôcť údajmi, ktorý sme zatiaľ v riešení nijako nevyužili. Bod P leží na osi strany AB, takže trojuholník APB je rovnoramenný so základňou AB. Zo zadania vieme, že trojuholníky APB, BQC a CRA sú podobné, preto zodpovedajúce si uhly majú rovnakú veľkosť. Dostávame

$$|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle PBA| = |\sphericalangle RAC| = |\sphericalangle RCA| = |\sphericalangle QCB| = |\sphericalangle QBC| = \varphi.$$

Navyše, oba uhly (rovnakej veľkosti φ) pri základni rovnoramenného trojuholníka sú vždy ostré, teda menšie ako 90°. Preto

$$|\sphericalangle RCA| + |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle BCQ| < 90^\circ + 180^\circ + 90^\circ = 360^\circ,$$

a teda platí, že body R a Q nemôžu súčasne ležať na priamke PC.
Zdalo by sa, že body P, C, R a Q nemôžu nikdy ležať na jednej priamke, ale nie je tomu tak. Celé doterajšie riešenie sa opieralo o fakt, že vieme zostrojiť priamku PC, čiže celé riešenie stálo na predpoklade $P \neq C$.
Pozrime sa preto na prípad $P = C$. Toto môže nastať jedine v prípade, že os strany AB (na ktorej leží bod P) prechádza bodom C, čiže v prípade, že trojuholník ABC je rovnoramenný so základňou AB. Môžu v tomto prípade body $P = C$, Q a R ležať na jednej priamke?
Keďže $P = C$, trojuholníky ARC a CQB sú v tomto prípade podobné s trojuholníkom ABC. Ak označíme veľkosť (hociktorého) uhla pri základni trojuholníka AB ako α, tak dostávame, že

$$|\sphericalangle RCQ| = |\sphericalangle RCA| + |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle BCQ| = \alpha + (180^\circ - 2\alpha) + \alpha = 180^\circ.$$

Body P, C, Q a R ležia na jednej priamke vtedy a len vtedy, ak trojuholník ABC je rovnoramenný so základňou AB a bod P je totožný s bodom C.
b) Ako ukázať, že nejaké štyri body vytvárajú rovnobežník? Môžme sa pokúsiť dokázať, že dve dvojice protiľahlých strán sú navzájom rovnobežné, alebo sa môžeme pokúsiť dokázať, že dve dvojice protiľahlých strán majú rovnakú veľkosť. Vyberme si tú druhú možnosť, a teda skúsme dokázať, že $|RC| = |PQ|$ a $|QC| = |PR|$. Vieme v obrázku nájsť nejaké dvojice úsečiek rovnakej dĺžky?
Bod P leží na osi strany AB, takže trojuholník APB je rovnoramenný so základňou AB. Zo zadania vieme, že trojuholníky APB, BQC a CRA sú podobné, preto aj trojuholníky BQC a CRA sú rovnoramenné, takže platí $|AR| = |RC|$ a $|BQ| = |QC|$. Stačilo by preto ukázať, že $|AR| = |PQ|$ a $|BQ| = |PR|$. Ako na to?
Ak by sme si boli narysovali presný obrázok, zistili by sme, že trojuholníky ARP a PQB sa zdajú byť zhodné. Ak by sa nám podarilo dokázať, že tieto trojuholníky sú naozaj zhodné, z toho by už vyplývali požadované rovnosti $|AR| = |PQ|$ a $|BQ| = |PR|$. Ako ukázať zhodnosť dvoch trojuholníkov? Najjednoduchšie asi pomocou niektorej z viet o zhodnosti trojuholníkov. Na dôkaz zhodnosti týchto trojuholníkov nemôžeme použiť rovnosť dĺžok strán AR a PQ, prípadne BQ a PR, pretože práve tieto rovnosti chceme dostať ako dôsledok zhodnosti trojuholníkov. Skúsme zhodnosť trojuholníkov ARP a PQB dokázať pomocou vety *usu*:
Strany AP a PB trojuholníkov ARP a PQB sú zrejme rovnakej veľkosti, keďže trojuholník APB je rovnoramenný. Ostáva sa nejako dopracovať k zhodnosti príslušných uhlov.
Po chvíli pátrania v obrázku prídeme na to, že to nepôjde tak ľahko. Po dlhšej chvíli pátrania (a možno aj chvíli rysovania) však môžeme objaviť ďalšiu zaujímavú skutočnosť: Trojuholníky APR a PBQ sú obidva podobné s trojuholníkom ABC! Totiž

$$|\sphericalangle RAP| = |\sphericalangle RAC| + |\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle PAB| + |\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CAB|.$$

Okrem toho, z podobnosti trojuholníkov CRA a BPA dostávame

$$\frac{|RA|}{|PA|} = \frac{|CA|}{|BA|},$$

čo môžeme prepísať aj ako

$$\frac{|RA|}{|CA|} = \frac{|PA|}{|BA|}.$$

Podľa vety *sus* sú trojuholníky APR a ABC podobné. Úplne rovnakým spôsobom dostávame, že aj trojuholníky PBQ a ABC sú podobné. (Vyskúšajte si to sami!) Potom ale aj trojuholníky APR a PBQ sú navzájom podobné, majú preto zodpovedajúce si uhly rovnakej veľkosti.

Toto bol posledný chýbajúci kúsok mozaiky. Môžeme riešenie uzavrieť:
Keďže trojuholníky APR a PBQ sú podobné a navyše $|AP| = |PB|$, tak sú aj zhodné. Preto $|AR| = |PQ|$ a $|BQ| = |PR|$, a teda aj $|RC| = |PQ|$ a $|QC| = |PR|$, z čoho vyplýva, že ak body P, C, Q, R neležia na jednej priamke, tak vytvárajú rovnobežník.
a) Využijeme, že v časti b) sme dokázali, že platí $|RC| = |PQ|$ a $|QC| = |PR|$. Za takýchto podmienok môžu body P, C, Q, R ležať na jednej priamke len v dvoch prípadoch: ak body R a Q ležia vnútri úsečky PC (čo nie je možné), alebo ak body P a C ležia vnútri úsečky QR. V tom prípade musí byť veľkosť uhla RCQ rovná 180°. Potom

$$180^\circ = |\sphericalangle RCQ| = |\sphericalangle RCA| + |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle BCQ| = \varphi + \gamma + \varphi$$
$$|\sphericalangle ACB| = \gamma = 180 - 2\varphi = |\sphericalangle APB|.$$

Dostávame $|\sphericalangle APB| = \gamma$, čo môže platiť len ak bod P leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC. Na druhej strane bod P leží vnútri trojuholníka ABC, takže jediná prípustná možnosť je $P = C$, čo môže nastať len ak trojuholník ABC je rovnoramenný so základňou AB. Podobne ako v prvom riešení ľahko sa overí, že v tomto prípade body $P = C$, Q a R naozaj ležia na jedej priamke.

4. Majme štyri navzájom rôzne kladné reálne čísla. Dokážte, že z nich vieme vybrať tri čísla a označiť ich a, b, c tak, že rovnice $ax^2 + x + b = 0$ (s neznámou x), $by^2 + y + c = 0$ (s neznámou y) a $cz^2 + z + a = 0$ (s neznámou z) buď všetky majú reálny koreň, alebo žiadna z nich nemá reálny koreň.

Opravovali: Jano Kováč a Tomáš Lučivjanský **Počet riešiteľov: 28**
Riešenie:
Skôr ako začneme riešiť, mali by sme si najskôr ujasniť, čo potrebujeme dokázať. Vieme, že kvadratická rovnica má riešenie práve vtedy ak jej je diskriminant väčší alebo rovný ako nula a nemá riešenie ak je jej diskriminant záporný. Úlohu možno teda preformulovať do podoby: z každých štyroch navzájom rôznych kladných čísel a, b, c, d je možné vybrať tri, ktoré si vieme označiť ako p, q, r takým spôsobom, aby platila buď podmienka 1 alebo podmienka 2.
Podmienka 1: $(pq < \frac{1}{4}) \wedge (pr < \frac{1}{4}) \wedge (rq < \frac{1}{4})$ (každá z daných rovníc nemá riešenie).
Podmienka 2: $(pq \geq \frac{1}{4}) \wedge (pr \geq \frac{1}{4}) \wedge (rq \geq \frac{1}{4})$ (každá z daných rovníc má riešenie)
Najväčší problém je v ďalšom postupe riešenia to, že v ňom nemáme žiadne údaje o číslach a, b, c, d, okrem toho, že majú byť kladné a navzájom rôzne. Musíme si preto nejakým spôsobom pomôcť. Bez újmy na všeobecnosti platí $a < b < c < d$. Rozoberme si teraz postupne aké možnosti môžu nastať:
A)$b > \frac{1}{2}$
B)$c < \frac{1}{2}$
C)$b < \frac{1}{2} \leq c$
Uvedomme si, že aspoň jedna z možností vždy nastane. Ak nastane možnosť A) vyberieme si za čísla p, q, r postupne čísla b, c, d, pretože v tomto prípade bude splnená podmienka 2). To kvôli tomu, že násobením dvoch čísel väčších ako $\frac{1}{2}$ dostaneme číslo väčšie ako $\frac{1}{4}$. Presne ten istý postup aplikujeme pre prípad B). Pri dôkaze možnosti C) využime fakt, že čísla a, b, c, d sú navzájom rôzne. Keďže sú rôzne tak určite platí buď $bc < \frac{1}{4}$ alebo $bc \geq \frac{1}{4}$ Iná možnosť nemôže nastať. Ak ale platí $bc < \frac{1}{4}$ zvolíme za čísla p, q, r trojicu a, b, c. Ak naopak platí $bc \geq \frac{1}{4}$ volíme za trojicu p, q, r čísla b, c, d. Ľahko sa už dokáže, že v prvom prípade je splnená podmienka 1 a v druhom prípade podmienka 2.

Riešenia 2. série úloh zimného semestra 32. ročníka

1. a) Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel také, že ich súčin je päťnásobkom ich súčtu.
b) Nájdite všetky trojice prirodzených čísel také, že ich súčin je päťnásobkom ich súčtu.

Opravoval: Robko Hajduk **Počet riešiteľov: 38**

Riešenie:

Poďme po poriadku a začnime časťou a). Nech našou dvojicou prirodzených čísel sú čisla a, b. Zo zadania úlohy máme, že pre túto dvojicu čísel má platiť $a \cdot b = 5(a+b)$. Spôsobov ako ďalej pokračovať je viacero. Uvedieme si dve z nich.

1. spôsob:

Roznásobme pravú stranu a dostávame, že $a \cdot b = 5a + 5b$. Teda $ab - 5a - 5b = 0$. Doplňme výraz $ab - 5a - 5b$ na súčin.

$$\begin{aligned} ab - 5a - 5b &= 0 \\ ab - 5a - 5b + 25 &= 25 \\ (a-5) \cdot (b-5) &= 25 \end{aligned}$$

Číslo 25 je možné rozložiť na súčin dvoch kladných prirodzenách čísel troma spôsobmi. A to $1 \cdot 25$, $5 \cdot 5$ a $25 \cdot 1$. Teda úloha môže mať najviac tri riešenia. Z prvého rozkladu dostávame $a - 5 = 1$ a $b - 5 = 25$, teda $a = 6$ a $b = 30$. Z druhého rozkladu dostávame $a - 5 = b - 5 = 5$ a teda $a = b = 10$. No a tretí rozklad je rovnaký s prvým, len hodnoty a a b sú opačné. Záver z toho plynúci je, že existujú tri dvojice čísle a, b spĺňajúce podmienku zadania a to $(6, 30)$, $(10, 10)$ a $(30, 6)$.

2. spôsob:

Z rovnosti $a \cdot b = 5(a + b)$ vidíme, že aspoň (teda nie práve) jedno z čísel a a b je deliteľné 5. Nech to bude číslo a. V tom prípade, si číslo a vyjadríme v tvare $a = 5k$, kde $k \in \mathbb{N}$. Upravme rovnosť $a \cdot b = 5(a + b)$.

$$\begin{aligned} 5k \cdot b &= 5(5k + b) \\ k \cdot b &= 5k + b \\ b &= \tfrac{5k}{k-1}. \end{aligned}$$

Číslo a je prirodzené pre ľubovoľnú hodnotu k. Určme, pre ktoré hodnoty k je aj číslo b prirodzené. Aby bolo b prirodzené číslo, musi byť $k - 1$ súdeliteľné s 5, alebo s k. Ak $k - 1 = 1$, tak $k = 2$ a $b = 10$ No a potom $a = 10$. V prípade, že $k - 1$ je súdeliteľné s 5 je $k - 1 = 5$ (verím, že si to i sami uvedomujete, že to tak je) a teda $k = 6$. A už len dopočítame a dostávame $a = 30$ a $b = 6$. A kde sa podelo tretie riešenie? Nezabudli sme naň, stačí len ak $b = 5k$ a potom posledne riešený prípad vyjde opačne.

Prejdime na časť b). Tu sa situácia mierne komplikuje. Máme už tri prirodzné čísla, a, b a c. Z rovnosti $a \cdot b \cdot c = 5(a + b + c)$ dostávame, že $a = \frac{5(b+c)}{bc-5}$. Pre zjednodušenie si označme $a \geq b \geq c$. (Naše riešenie tým neutrpí, nakoľko vieme., že ak nájdeme jednu trojicu, ktorá je riešením úlohy, tak aj jej permutácie sú riešením úlohy) Ak by platila rovnosť, dostaneme

$$a \cdot b \cdot c = 5(a + b + c) \leq 15a.$$

Malou úpravou dostávame, že $b \cdot c \leq 15$. Takže $5 < bc \leq 15$. Navyše, $c < 4$ (ak $c = 4$, potom $b \geq 4$ a $bc \geq 16$). Takže dvojice (b, c) ktoré ostali na overenie sú: $(b, 1)$, kde $b \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$, $(b, 2)$, kde $b \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$ a $(b, 3)$, kde $b \in \{3, 4, 5\}$. No a dosadení a dorátaním a dostávame, že existuje 8 neusporiadaných trojíc vyhovujúcich zadaniu našej úlohy a sú to $(1, 6, 35)$, $(1, 7, 20)$, $(1, 8, 15)$, $(1, 10, 11)$, $(2, 3, 25)$, $(2, 4, 10)$, $(2, 5, 7)$, $(3, 4, 5)$.

2. a) Dokážte, že pre všetky $k > 1$ existuje k-tica prirodzených čísel takých, že ich súčin je päťnásobkom ich súčtu.
b) Rozhodnite, pre ktoré $k > 1$ existuje k-tica navzájom rôznych prirodzených čísel takých, že ich súčin je päťnásobkom ich súčtu.

Opravoval: Feri Kardoš **Počet riešiteľov: 22**

Riešenie:

V časti a) bolo treba dokázať, že pre všetky $k > 1$ existuje k-tica prirodzených čísel takých, že ich súčin je päťnásobkom ich súčtu. Aby sme overili platnosť tohto výroku, stačí pre každé $k \geq 2$ nájsť aspoň jednu k-ticu s požadovanou vlastnosťou. Pre $k = 2$ a $k = 3$ sme dvojice, resp. trojice hľadali v prvej úlohe, takže stačí sa zaoberať prípadom $k \geq 4$.

Označme hľadaných k prirodzených čísel ako $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Keďže stačí nájsť jednu k-ticu s požadovanou vlastnosťou, niektoré z týchto čísel si môžeme zvoliť. Ak položíme $a_1 = k - 2$, $a_2 = 10$ a $a_3 = a_4 = \cdots = a_k = 1$ (spolu $k - 2$ jednotiek), dá sa ľahko overiť, že súčin týchto k čísel sa rovná päťnásobku ich súčtu:

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_k = (k + 8) \cdot 10 \cdot 1 \cdots 1 = 10k + 80$$
$$5(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = 5(k + 8 + 10 + k - 2) = 5(2k + 16) = 10k + 80$$

Iná vhodná k-tica je podobná, $a_1 = 5k + 20$, $a_2 = 6$ a zvyšných $k - 2$ čísel sú samé jednotky.

Túto časť úlohy drvivá väčšina riešiteľov zvládla, za správne riešenie získali po 3 body.

V časti b) bolo treba zistiť, pre ktoré $k > 1$ existuje k-tica navzájom rôznych prirodzených čísel takých, že ich súčin je päťnásobkom ich súčtu.

Pre $k = 2$ a $k = 3$ sa opäť možno odvolať na riešenie prvej úlohy, vhodná dvojica čísel je napríklad 6 a 30, vhodná trojica čísel je napríklad 1, 10 a 11, alebo 3, 4 a 5. Pre $k = 4$ sa takisto dá nájsť štvorica čísel s požadovanou vlastnosťou, napríklad 1, 2, 5 a 8, alebo aj 1, 2, 3 a 30. Tým, že sme pre $k = 2$, 3 a 4 našli (minimálne) jednu k-ticu vhodných čísel, dokázali sme, že pre $k = 2$, 3 a 4 existuje taká k-tica.

Ako je to pre $k \geq 5$? Po vyskúšaní niekoľkých k-tic človek nadobudne presvedčenie, že pre aspoň 5 čísel je ich súčin vždy väčší ako päťnásobok ich súčtu, nemôžu sa preto nikdy rovnať. Ďalej sa dá vypozorovať, že čím väčšie tie čísla sú a čím viac ich je, tak tým väčší je rozdiel medzi súčinom a päťnásobkom súčtu. Presvedčenie alebo pozorovanie však nie je dôkaz! Poďme sa preto na tieto tvrdenia pozrieť podrobnejšie.

Zoberme najprv pre jednoduchosť prípad $k = 5$. Našim cieľom je ukázať, že pre každých 5 navzájom rôznych prirodzených čísel platí

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 > 5 \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5). \tag{1}$$

Ak vyskúšame päť najmenších prirodzených čísel, tak ich súčin je $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5! = 120$, čo je očividne viac, ako päťnásobok ich súčtu: $5 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 75$. Len na základe toho, že pre najmenších 5 čísel je súčin väčší ako päťnásobok súčtu, však ešte nemôžeme urobiť záver, že pre všetky pätice rôznych čísel bude ich súčin väčší ako päťnásobok ich súčtu.

Skúsme sa preto pozrieť na to, ako sa zmení súčin a súčet, ak zmeníme niektoré číslo. Ak zväčšíme niektoré z čísel a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 o 1, tak súčet čísel sa zväčší o 1, takže pravá strana nerovnosti (1) sa zväčší o 5. Na druhej strane súčin na ľavej strane nerovnosti (1) sa zväčší o hodnotu súčinu zvyšných štyroch čísel, čo je určite aspoň $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Takže ak zväčšíme niektoré z čísel o 1, rozdiel medzi ľavou a pravou stranou nerovnosti (1) narastie. A toto je kľúčová myšlienka! Veď predsa každú päticu navzájom rôznych prirodzených čísel vieme dostať z pätice 1, 2, 3, 4, 5 tak, že postupne zväčšujeme niektoré z týchto čísel o 1. No a keďže už pre čísla 1, 2, 3, 4, 5 je súčin väčší ako päťnásobok súčtu, a navyše pri každom zväčšení niektorého čísla o 1 sa rozdiel medzi súčinom a päťnásobkom súčtu len zväčšuje, nemôže sa nikdy súčin piatich navzájom rôznych prirodzených čísel rovnať päťnásobku ich súčtu, čo bolo treba dokázať.

Keďže už sme prišli na pointu, vieme túto myšlienku zovšeobecniť pre všetky $k \geq 5$. Ukážme, že pre každých k navzájom rôznych prirodzených čísel platí

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_k > 5 \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_k). \tag{2}$$

Pre všetky $k \geq 5$ platí, že ak zväčšíme niektoré z tých k čísel o 1, tak ľavá strana nerovnosti (2) sa zväčší o aspoň 24, zatiaľ čo pravá strana sa zväčší len o 5, takže rozdiel medzi súčinom a päťnásobkom súčtu narastá. Preto stačí dokázať nerovnosť (2) pre čísla 1, 2, ..., k, čiže stačí dokázať nerovnosť

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdots k &> 5 \cdot (1 + 2 + \cdots + k) \\ k! &> 5 \cdot \frac{k(k+1)}{2} \\ (k-1)! &> \frac{5 \cdot (k+1)}{2} \\ (k-1)(k-2)! &> \frac{k+1}{2} \cdot 5 \end{aligned}$$

Je zrejmé, že pre $k \geq 5$ platí $k - 1 > \frac{k+1}{2}$ a tiež platí $(k-2)! > 5$, takže posledná nerovnosť je dokázaná.
Vhodná k-tica preto existuje len pre $k = 2$, 3 a 4.

Komentár: Mnohí riešitelia objavili správnu odpoveď aj v časti b), riešenia však častokrát neboli úplné: Niektorí zabudli na to, že ak majú dokázať, že pre $k = 2$, 3 a 4 existuje vhodná k-tica, treba nájsť aspoň jednu. Viacerí sa pre $k \geq 5$ nechali uniesť dojmami a tvrdenia typu "súčin rastie rýchlejšie ako súčet" poriadne nesformulovali ani nedokázali. V tomto prípade však bolo treba tieto myšlienky sformulovať exaktnejšie, aby nezneli len ako zbožné priania alebo pocity, ale aby vyjadrovali presné matematické argumenty. Verím, že sa z tohto malého neúspechu všetci poučíme.

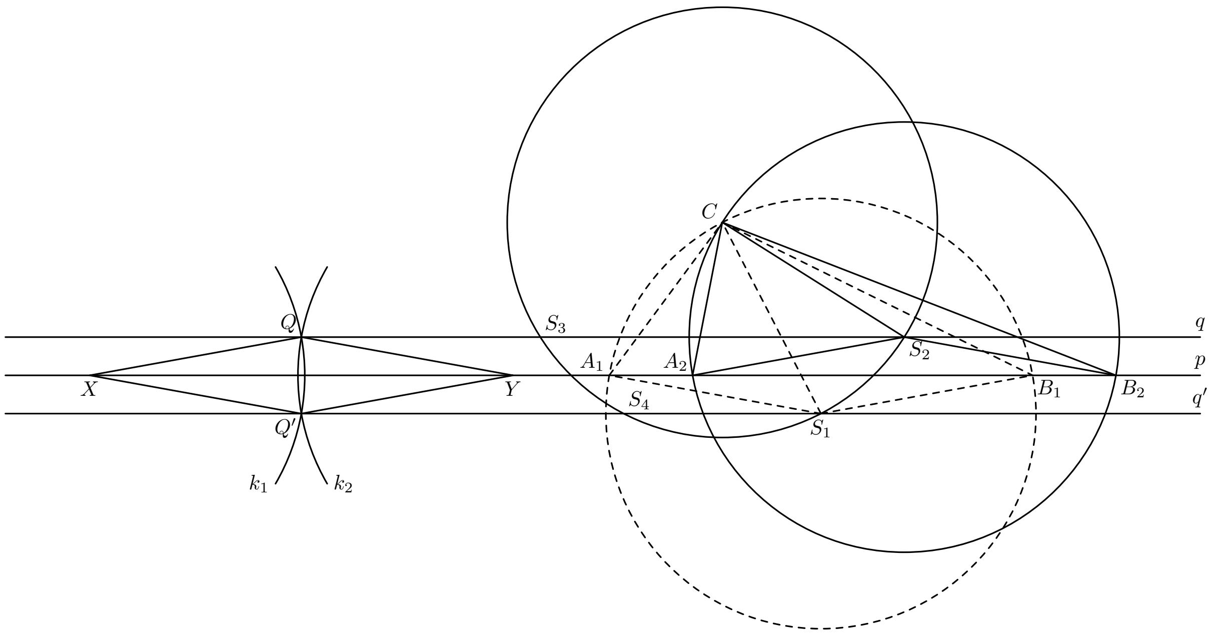
3. V rovine je daná priamka p a bod C, ktorý na nej neleží. Po priamke p sa pohybuje úsečka AB pevnej dĺžky d.
a) Zostrojte trojuholník ABC, ak okrem daného bodu C, priamky p a dĺžky d poznáte veľkosť polomeru R kružnice opísanej trojuholníku ABC. b) Pre ktorú polohu úsečky AB má trojuholník ABC najväčší obsah?
c) Pre ktorú polohu úsečky AB má kružnica vpísaná do trojuholníka ABC najväčší polomer?
V úlohách b) a c) treba nájsť všetky také polohy a zdôvodniť, prečo sú to len tie a žiadne iné.

Opravoval: Tomáš Lučivjanský **Počet riešiteľov: 37**

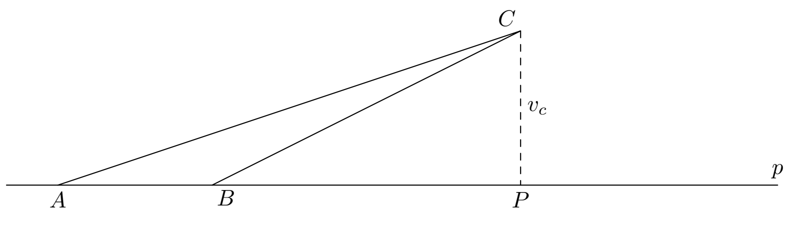
Riešenie:

a) Máme danú priamku p, bod C, ktorý na nej neleží, dĺžku úsečky $|AB| = d$ a veľkosť polomeru kružnice opísanej trojuholníku R. Je zrejmé, že keby sme poznali stred S kružnice opísanej trojuholníku ABC, vedeli by sme ho už skonštruovať. Zostrojme teda kružnicu k so stredom C a polomerom R. Stred S kružnice opísanej trojuholníku ABC určite leží na tejto kružnici. Na základe toho, že poznáme veľkosť strany AB a polomer R, vzdialenosť bodu S od priamky p sa dá vypočítať. Ale keďže v tomto prípade sa jedná o konštrukčnú úlohu, problémy často nastávajú s tým, ako zostrojiť úsečku, ktorej dĺžku vyjadruje nejaký nepríjemný zložitý výraz. Niektoré výrazy sa síce dajú skonštruovať pomocou podobnosti trojuholníkov, vlastností pravouhlých trojuholníkov, a iných fínt, v konštrukčnej úlohe by sme sa však mali týmto trikom vyhnúť. V rámci rozboru môžeme objaviť nejaké nové skryté súvislosti medzi zadanými objektami (bodmi, priamkami, kružnicami) a tieto súvislosti potom v konštrukcii využiť.
Predstavme si, že úloha vyzerá trocha inak: Namiesto toho, že by bol daný bod C a priamka p, na ktorej majú ležať body A a B (v danej vzdialenosti d), nech sú dané body A a B vo vzdialenosti d a priamka s ($s \parallel AB$), na ktorej má ležať bod C. (Samozrejme, je daný tiež polomer R kružnice opísanej trojuholníku ABC.) Skúste vyriešiť túto úlohu! Máte?

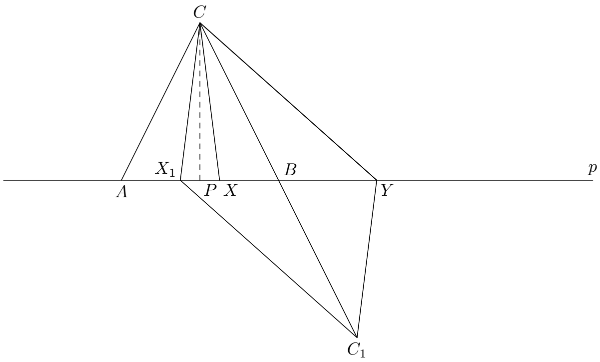
V tomto prípade vieme jednoducho nájsť bod S, pretože body A a B sú dané a poznáme vzdialenosť bodu S od bodov A a B. Potom bod C leží na kružnici so stredom S a polomerom R, a zároveň na zadanej priamke s.
Situácia je ale trocha komplikovanejšia. Pomôžme si preto pomocným trojuholníkom, v ktorom budeme imitovať vlastnosti hľadaného trojuholníka ABC.
Zvoľme si na priamke p dva ľubovoľné body X a Y také, že $|XY| = d$. (Tieto dva body zodpovedajú bodom A a B.) Zostrojme kružnice $k_1(X, R), k_2(Y, R)$ a označme Qa Q' priesečníky kružníc k_1 a k_2. (Tieto body zodpovedajú bodu S.) Nutná podmienka, aby sme získali bod Q je aby $2R > d$, lebo ináč by sa nám kružnice k_1 a k_2 vôbec nepretli. V tom prípade by úloha nemala riešenie. Keďže dopredu nevieme, či uhol pri vrchole C v trojuholníku ABC je ostrý alebo tupý, tak ak nevymyslíme nič šikovnejšie, treba brať do úvahy obidva priesečníky kružníc k_1 a k_2. Jeden z nich je v rovnakej polrovine určenej priamkou p ako bod C (vtedy je uhol pri vrchole C ostrý), druhý je v opačnej polrovine (vtedy je uhol pri vrchole C tupý). Ak $2R = d$, tak (jediný) bod Q leží na priamke p.



Je zrejmé, že pre hľadaný stred S kružnice opísanej trojuholníku ABC platí $|S, p| = |Q, p|$. A teda na to, aby sme získali bod S, stačí zostrojiť priamky q a q' rovnobežné s priamkou p, prechádzajúce bodmi Q a Q'. Ak priamky q a q' nepretínajú kružnicu $k(C, R)$, úloha nemá riešenie. Naopak, ak $q \cap k(C, R) \neq \emptyset$ alebo $q' \cap k(C, R) \neq \emptyset$, tak úloha má toľko riešení, koľko tam nájdeme spolu priesečníkov. Týmto spôsobom teda vieme získať stred S kružnice opísanej trojuholníku ABC. Potom už stačí nájsť body A a B ako priesečníky kružnice $l(S, R)$ a priamky p.



b) S tou časťou ste nemali skoro žiadne problémy. Pri jej riešení si stačí uvedomiť, že bez ohľadu na to, kde na priamke p sa strana AB nachádza, je vzdialenosť $|p, C|$ konštantná a teda aj veľkosť výšky v_c na stranu AB je nemenná. Ak si uvedomíme ďalej, že podľa zadania je veľkosť $|AB|$ pevne daná a obsah $\triangle ABC$ sa dá vypočítať podľa vzťahu $\frac{|AB| v_c}{2}$, v ktorom sa ale vyskytujú dĺžky, ktoré pre žiadnu polohu úsečky AB nemenia svoju veľkosť a preto sa nemení ani obsah $\triangle ABC$. Odpoveď na otázku v zadaní je, že pre ľubovoľnú polohu úsečky AB na priamke p je obsah $\triangle ABC$ rovnako veľký.
Časť c) medzi obsahom $\triangle ABCS$, polomerom vpísanej kružnice r a obvodom o platí vzťah $S = \frac{ro}{2}$.



Dá sa nájsť buď v nejakej literatúre, alebo sa dá celkom jednoducho dokázať využitím vzorca pre obsah trojuholníka a vlastností stredu kružnice vpísanej do daného trojuholníka. Keďže podľa časti b) vieme, že veľkosť obsahu S je konštantná, tak aby r bol maximálny možný, musí byť obvod trojuholníka o čo možno najmenší.
Obvod o je rovný $|AB|+|BC|+|CA|$. Ale veľkosť AB sa nemenní, preto je potrebné nájsť, takú polohu AB, ktorá minimalizuje súčet $|BC|+|CA|$. Aby sme zistili pre aký trojuholník by mohol byť tento súčet minimálny, pokúsme sa zostrojovaním trojuholníkov nájsť jeden taký.
Je výhodne vždy v takomto prípade vyskúšať nielen všeobecné prípady, ale aj niektoré špeciálne prípady. Ako napr. pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole A,B alebo C, rovnoramenný trojuholník s $|CA| = |CB|$ a podobne. Po tomto skušaní sa dá vidieť, že vhodným kandidátom na hľadaný trojuholník by mohol byť rovnoramenný $\triangle ABC$. A pozrime sa teraz na to, či to tak skutočne je.
Nech teda body A a B ležia na priamke p,a nech platí $|AB| = d$ a $|CA| = |CB|$.
Trojuholník ABC je teda rovnoramenný trojuholník. Body X,Y nech sú dva ľubovľné body ležiace na priamke p rôzne od A,B s vlastnosťou $|XY| = d$. Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že bod A leží naľavo od bodu B a podobne aj bod X leží naľavo vzhľadom k bodu Y. Chceme teraz ukázať, že nezávisle od toho, ako zvolíme body X a Y vždy je splnená nerovnosť
$|CX| + |CY| \geq |CA| + |CB|$. Nech X_1
je obraz bodu X v stredovej súmernosti podľa P. Potom CB je ťažnicou v trojuholníku CX_1Y. Zobrazme si trojuholník CX_1Y v stredovej súmernosti podľa bodu B. Potom $X_1 \to Y, Y \to X_1$ a $C \to C_1$. Z trojuholníkovej nerovnosti pre trojuholník CX_1C_1 dostávame $|CX_1| + |X_1C_1| \geq |CC_1|$, ale z vlastností stredovej súmernosti vieme, že $|CY| = |C_1X_1|$ a $|BC_1| = |BC|$.
Preto platí $|CX_1|+|CY| \geq 2|CB|$. Keďže je ale zároveň splnené $|CX_1| = |CX|$ a $|CB| = |CA|$, dostávame

$$|CX| + |CY| \geq |CA| + |CB|.$$

A to je to nerovnosť, ktorú sme chceli dokázať.

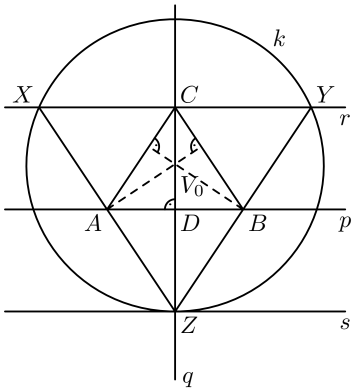
4. V rovine je daná priamka p a bod C, ktorý na nej neleží. Po priamke p sa pohybuje úsečka AB pevnej dĺžky d.
a) Po akej dráhe sa pohybuje priesečník výšok V trojuholníka ABC?
b) Po akej dráhe sa pohybuje ťažisko T trojuholníka ABC?
c) Zostrojte trojuholník ABC, ak je daná dĺžka úsečky AB, vzdialenosť bodu C od priamky AB a súčin dĺžok ťažníc z vrcholov A a B.
V úlohách a) a b) treba podrobne popísať, do ktorých bodov roviny sa môže uvažovaný bod (V, resp. T) dostať pri pohybe úsečky AB. Nezabudnite zdôvodniť, že sú to všetky také body, teda že do iných bodov sa uvažovaný bod dostať nemôže.

Opravoval: Marek Derňár **Počet riešiteľov: 24**

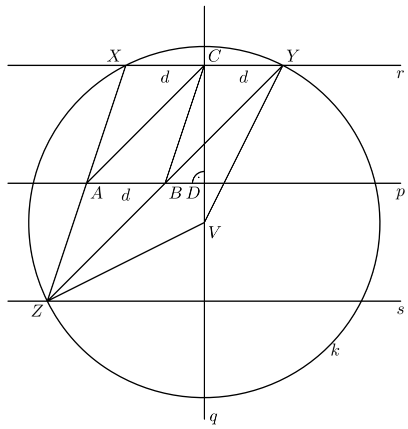
Riešenie:

a) V časti a) máme zistiť, po akej dráhe sa pohybuje priesečník výšok V (ortocentrum) trojuholníka ABC. Keďže bod C a priamka p sú pevne dané, tak aj priamka q ($q \perp p, C \in q$), na ktorej leží v_c, je pevne daná. Čiže bod V sa musí nachádzať na tejto priamke q. Tu mnohí z vás skončili a prehlásili, že bod V sa pohybuje po tejto priamke.
Tí, ktorí sa nad úlohou zamysleli trošku hlbšie zistili, že bod V sa pohybuje iba po polpriamke, ktorej krajný bod je ortocentrom rovnoramenného trojuholníka ABC (to však treba korektne zdôvodniť)

označme si ho ako V_0. Čiže sme zistili, že bod V sa môže pohybovať po polpriamke V_0D ($D \in p \cap q$). Musíme však ešte dokázať, že ľubovoľný bod tejto polpriamky môže byť ortocentrom nejakého trojuholníka ABC. To ukážeme nasledujúcim spôsobom: (riešenie podľa Tomáša Kocáka)

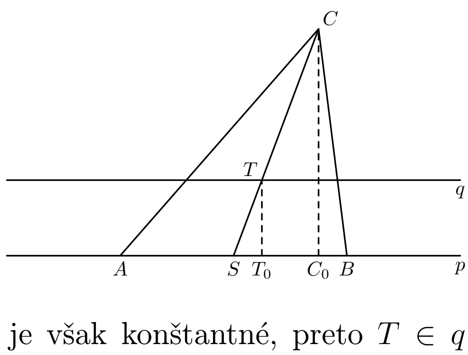


Zoberme si ľubovoľný trojuholník XYZ. Nech X_0, Y_0, Z_0 sú v tomto poradí stredy strán YZ, ZX, XY trojuholníka XYZ. Trojuholníky $X_0Y_0Z_0$ a XYZ sú podobné s koeficientom podobnosti $\frac{1}{2}$ a navyše XY je rovnobežné s X_0Y_0, XZ je rovnobežné s X_0Z_0 a YZ je rovnobežné Y_0Z_0 (vlastnosti stredných priečok). Zostrojme teraz ortocentrum v trojuholníku $X_0Y_0Z_0$. Tento bod je ale totožný so stredom kružnice opísanej trojuholníku XYZ (ako vidíte na obrázku, leží na osiach strán trojuholníka XYZ).
Teraz sa vráťme k našej úlohe. Zoberme si, že máme dané priamky p, q a bod C. Zoberme si ľubovoľný bod V na priamke q. Zostrojme priamku r, pričom r je rovnobežná s p a prechádza bodom C. Na nej zostrojíme body X a Y, pričom $|XC| = |YC| = d(= |AB|)$ a body X a Y nie sú totožné.



Teraz nám už iba stačí urobiť kružnicu $k(V, |XV|)$ a jej prienik s priamkou s (v osovej súmernosti podľa p sa priamka r zobrazí do priamky s) označíme ako Z (vyberieme si ľubovoľný z bodov Z). Čiže sme zostrojili trojuholník XYZ. Ale keď sa nad tým zamyslíme, tak XYZ je zvolený presne tak, že trojuholník $X_0Y_0Z_0$ nie je nič iné ako hľadaný trojuholník ABC. Potom nám už nerobí problém nájsť body A, B ako prienik priamok XC a YC s priamkou p. Tým sme však našli trojuholník ABC, ktorého ortocentrum je presne V. Jediným problémom môže byť, či existuje priesečník priamky s a kružnice k. Pokiaľ by sme zvolili bod V totožný s bodom V_0, tak z vlastností rovnoramenného trojuholníka vyplýva, že kružnica k a priamka s sa musia dotýkať. Potom však je zrejmé, že ak V je na polpriamke V_0D, tak sa priamka s a kružnica k pretínajú v 2 bodoch, čiže trojuholník ABC existuje. Ak však V leží na opačnej polpriamke k V_0D, tak priamka s je nesečnicou kružnice k, čiže trojuholník ABC neexistuje.
Tým sme naozaj dokázali, že bod V sa môže dostať do každého bodu polpriamky V_0D a taktiež, že žiadny iný bod nadobudnúť nemôže.
Táto úloha išla taktiež hravo riešiť analyticky (dokazovanie tej druhej časti by sa tým značne zjednodušilo).

b) V časti b) máme zistiť, po akej dráhe sa pohybuje priesečník ťažníc T (ťažisko) trojuholníka ABC. Označme si body T_0, C_0 a S ako na obrázku (T_0 je päta kolmice z bodu T na priamku p, C_0 je päta kolmice z bodu C na priamku p a S je stred strany AB). Potom podľa vety *uu* o podobnosti trojuholníkov je $\triangle SC_0C \sim \triangle ST_0T$. Keďže ťažisko T delí ťažnicu v pomere $1 : 2$, tak $|SC| = 3|ST|$, čiže pomer podobnosti je 3. Potom však $|TT_0| = \frac{1}{3}|CC_0|$, čiže $|T, p| = \frac{1}{3}|C, p|$. Takže ťažisko ľubovoľného trojuholníka ABC je vzdialené od priamky p presne $\frac{1}{3}|C, p|$, čo je však konštantné, preto $T \in q$ ($|q, p| = \frac{1}{3}|C, p|$, q sa nachádza v rovnakej polrovine ako C vzhľadom na priamku p).



Teraz opäť takmer každý skonštatoval, že dráhou bodu T je určite celá priamka q. To by však nemusela byť pravda (ako vidíme v časti a), preto ešte musíme ukázať, že k ľubovoľnému bodu T priamky q vieme nájsť vhodný trojuholník ABC. Keď však máme bod T na q, tak hneď vieme dostať bod S (ako priesečník priamok p a TC) a máme aj body A a B ($A, B \in p$, $|AS| = |BS| = \frac{d}{2}$, A nie je totožné s B). Z podobnosti trojuholníkov opäť vieme dokázať, že $|ST| = \frac{1}{2}|TC|$, čím sme overili správnosť konštrukcie.

Takže sme dokázali, že bod T sa pohybuje po celej priamke q a žiadny iný bod nadobudnúť nemôže. Táto úloha išla taktiež hravo riešiť analyticky (dokazovanie tej druhej časti by sa tým značne zjednodušilo).

c) Máme dané $|AB| = d$, $v_c = v$ a súčin $t_a \cdot t_b$. Označme si ťažisko ako T. Keďže ťažisko rozdeľuje ťažnicu v pomere 1 : 2, tak $|AT| = \frac{2t_a}{3}$, $|BT| = \frac{2t_b}{3}$, čiže $|AT| \cdot |BT| = \frac{4}{9} t_a \cdot t_b$. Obsah trojuholníka ATB vieme vypočítať ako

$$S_{\triangle ATB} = \frac{1}{2} \cdot |AT| \cdot |BT| \cdot \sin \angle ATB = \frac{2}{9} \cdot t_a \cdot t_b \cdot \sin \angle ATB.$$

Podľa sínusovej vety však máme $\sin \angle ATB = \frac{|AB|}{2R} = \frac{d}{2R}$, kde R označuje polomer kružnice opísanej trojuholníku ATB. Potom $S_{\triangle ATB} = \frac{t_a \cdot t_b \cdot d}{9R}$. Obsah trojuholníka ATB taktiež vieme zistiť aj pomocou výšky v_t, ktorá ako sme zistili v časti b) je $v_t = \frac{1}{3} v_c = v/3$. Čiže $S \triangle ATB = \frac{d \cdot v}{6}$. Keď tie obsahy položíme do rovnosti, tak dostávame, že platí:

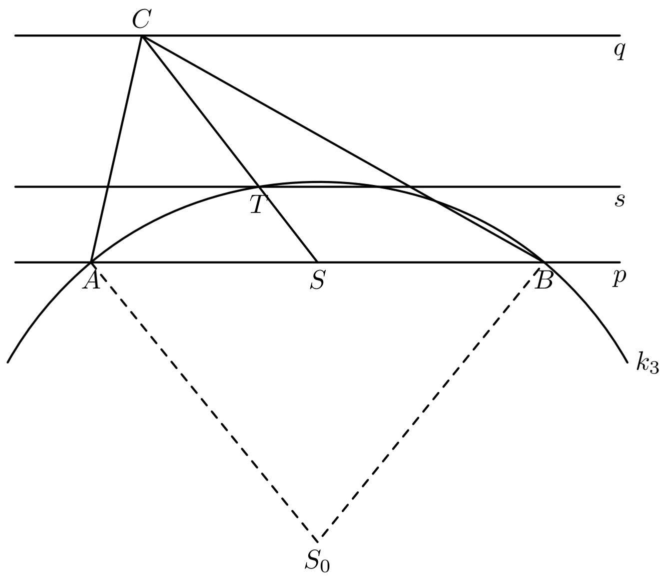
$$S_{\triangle ATB} = \frac{t_a \cdot t_b \cdot d}{9R} = \frac{d \cdot v}{6}$$
$$R = \frac{2 \cdot t_a \cdot t_b}{3v}$$

Keďže $t_a \cdot t_b$ aj v poznáme, tak veľkosť $R = \frac{2 \cdot t_a \cdot t_b}{3v}$ vieme pomocou podobnosti trojuholníkov konštrukčne zostrojiť.

Čiže môžeme písať postup konštrukcie:

1. p
2. $A, B; A, B \in p, |AB| = d$
3. $k_1; k_1(A, R)$ –

   veľkosť R si skonštruujeme niekde pomimo
4. $k_2; k_2(B, R)$
5. $S_o; S_o \in k_1 \cap k_2$
6. $s; |s, p| = \frac{1}{3} v$
7. $k_3; k_3(S_o, R)$
8. $T; T \in k_3 \cap s$
9. $S; S$ je stred AB
10. $q; |q, p| = v$
11. $C; C \in ST \cap q$



Dôkaz správnosti tejto konštrukcie sme už vlastne spravili. Ešte musíme viesť diskusiu o možnom počte riešení. Z postupu konštrukcie vyplýva, že v jednej polrovine vzhľadom na priamku p môžu byť 0, 1 alebo 2 riešenia (keďže s môže byť ku k_3 nesečnica, dotyčnica alebo sečnica). Časť c obsahovalo iba zopár vašich riešení a nikto ju nevyriešil úplne správne. Najčastejšou chybou bolo to, že z daných údajov ste si vypočítali iné údaje. To by ste mohli urobiť, keby ste mali číselne zadané dĺžky. Bohužiaľ tie dĺžky môžu byť zadané aj konštrukčne (čiže môžete ich mať iba niekde narysované), no a potom vypočítať nevieme nič.

Konečné poradie Zimného semestra 32. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	1.	2.	3.	4.	H	CS
1.	Tomáš Kocák	4. A	GPoštKE	9	9	8	8	9	9	9	8	4	85
2.	Martin Polačko	Septima A	GAlejKE	9	8	9	9	6	8	9	4	0	77
3.	Filip Sládek	Sexta B	GMierNO	9	9	-	8	8	9	7	4	1	71
4.	Miroslav Baláž	Oktáva	GKomeHÉ	9	9	9	9	6	3	6	5	0	68
5.	Katarína Juríková	4. F	GTajoBB	9	4	9	8	9	7	5	5	1	65
6.	Adriána Szilágyiová	4. A	GPoštKE	9	9	9	9	4	-	9	5	3	63
7.	Jakub Köry	4. B	GMudrPO	9	8	1	9	9	9	7	4	2	61
8.	Viktor Popovič	Sexta A	GMudrPO	7	4	4	5	9	3	8	4	0	57
9.	Eduard Eiben	3. A	GPoštKE	9	8	-	-	9	9	8	-	0	51
9.	Tomáš Rizman	Septima B	GVaršŽA	2	9	-	9	9	8	6	-	0	51
11.	Jakub Vaňo	3. D	GMudrPO	7	4	-	8	5	6	7	4	0	50
12.	Jakub Jursa	Septima A	GAlejKE	7	9	-	9	3	-	7	4	0	49
13.	Alexandra Kuncová	Septima A	GAlejKE	9	4	-	8	5	6	7	-	2	48
14.	Juraj Mitro	Sexta A	GMudrPO	9	4	-	-	9	3	9	-	1	47
15.	Jana Sásková	Septima	G1májTN	9	4	2	-	7	5	9	3	1	46
16.	Jana Baranová	Sexta	GAlejKE	9	4	3	0	5	-	8	3	1	41
16.	Nikola Špesová	4. A	GKonšPO	7	4	-	8	4	7	7	2	0	41
18.	Judita Hodásová	Septima	GGrösBA	3	5	-	6	4	4	7	4	-6	40
19.	Miroslav Liščinský	Septima B	GAlejKE	9	4	-	4	9	-	5	2	-3	39
19.	Vladimír Novák	4. A	GPoštKE	7	4	8	5	4	-	7	-	0	39
21.	Petra Zibrínová	1. D	GMudrPO	9	3	-	-	4	-	5	2	0	37
22.	Ján Hoffmann	Kvinta	GAlejKE	9	3	2	0	4	-	3	2	0	36
23.	Jozef Jakubík	4. C	GKomePE	9	4	9	9	-	-	-	-	1	35
23.	Matúš Benko	4. D	GMudrPO	7	5	-	9	4	-	7	3	1	35
25.	Matúš Stehlík	Kvinta	GAlejKE	9	8	-	-	4	-	-	-	0	34
26.	Michal Paulovský	Septima	GGrösBA	7	3	1	0	4	4	6	1	-6	31
27.	Andrea Görcsösová	Sexta	GAlejKE	7	4	1	-	3	-	5	2	0	29
28.	Katarína Povolná	Oktáva	GAlejKE	-	-	-	-	9	3	8	5	1	28
28.	Lucia Fabišíková	3. E	GPoštKE	0	5	3	2	5	3	2	3	0	28
30.	Monika Vaľková	Sexta	GAlejKE	9	4	-	-	2	-	5	-	0	26
30.	Viera Doničová	Oktáva A	GTr12KE	3	4	1	0	7	4	3	2	0	26
32.	Dávid Štrbka	Oktáva	GGrösBA	-	-	-	-	9	3	6	3	0	24
32.	Bibiana Kucerová	Kvinta	GAlejKE	9	3	3	0	-	-	-	-	0	24
34.	Michal Petrucha	4. AF	GMetoBA	7	-	-	-	4	-	7	2	0	22
35.	Gabriela Brndiarová	Sexta B	GOkruZV	2	4	3	0	2	-	4	1	0	21
36.	Jakub Ivanecký	Septima B	GAlejKE	7	3	2	4	-	-	-	-	-3	19
36.	Michaela Mokcsayová	Oktáva A	GDaxnVT	-	-	-	-	8	2	5	2	0	19
38.	Marián Dobranský	3. E	GPoštKE	-	4	-	-	4	-	6	2	0	18
39.	Milan Bartoš	3. A	GPoštKE	4	5	-	0	-	-	5	2	0	16
39.	Jakub Hvizdoš	3. A	GPoštKE	-	-	-	-	3	4	6	-	0	16
41.	Ladislav Hovan	1. A	GExnáKE	3	4	3	-	-	-	-	-	0	14
42.	Tomáš Kuzma	Septima A	GAlejKE	-	-	-	-	4	-	-	4	0	8
43.	Dávid Vendel	3. A	GPoštKE	7	-	-	-	-	-	-	-	0	7

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	1.	2.	3.	4.	H	CS
44.	Katarína Zubnárová	4. F	GTajoBB	3	3	-	-	-	-	-	-	0	6
44.	Lucia Kažimírová	3. A	GMudrPO	-	-	-	-	1	-	5	-	0	6
44.	Daniel Till	9. A	ZAngeKE	-	3	-	-	-	-	-	-	0	6
47.	Juraj Milčák	4. A	GPuškKE	-	-	-	0	-	-	-	-	0	0

Pohár konštruktérov Zimného semestra 32. ročníka

P.	Skratka	Škola	P.r.	Body
1.	GAlejKE	Gymnázium Alejová 1 041 49 Košice	13	458
2.	GPoštKE	Gymnázium Poštová 9 042 52 Košice	9	323
3.	GMudrPO	Gymnázium J. A. Raymana Mudroňova 20 080 01 Prešov	7	293
4.	GGrösBA	Gymnázium Grösslingova 18 811 09 Bratislava 1	3	95
5.	GMierNO	Gymnázium A. Bernoláka Mieru 307/23 029 01 Námestovo	1	71
5.	GTajoBB	Gymnázium J. G. Tajovského 25 974 01 Banská Bystrica	2	71
7.	GKomeHÉ	Gymnáz. gen. L. Svobodu Komenského 4 066 51 Humenné	1	68
8.	GVaršŽA	Gymnázium Varšavská cesta 1 010 08 Žilina - Vlčince	1	51
9.	G1májTN	Gymnázium 1. mája 2 911 01 Trenčín	1	46
10.	GKonšPO	Gymnázium Konštantínova 2 080 01 Prešov	1	41
11.	GKomePE	Gymnázium Komenského 2/1074 958 01 Partizánske	1	35
12.	GTr12KE	Gymnázium Trebišovská 12 040 11 Košice	1	26
13.	GMetoBA	Gymnázium Metodova 2 821 08 Bratislava 2	1	22
14.	GOkruZV	Gymnázium Okružná 2469 960 01 Zvolen	1	21
15.	GDaxnVT	Gymnázium Dr. Daxnera 88 093 13 Vranov nad Topľou	1	19
16.	GExnáKE	Gymnázium Exnárova 10 040 22 Košice	1	14
17.	ZAngeKE	Základná škola Park Angelinum 8 040 01 Košice	1	6
18.	GPuškKE	Evanjelické gymnázium Puškinova 3 040 01 Košice	1	0

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach
- Copycentrum Pergamon s.r.o.

Názov **STROM** – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 2 • November 2007 • Zimný semester 32. ročníka (2007/2008)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `http://www.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`