KOREŠPONDENČNÝ MATEMATICKÝ SEMINÁR

MATIK

ČÍSLO 2 — ROČNÍK 36 matik.strom.sk

Ahoj!

Tvojmu pohľadu zjavne neuniklo ďalšie vydanie MATIKa, v ktorom nájdeš nielen poradie po prvej sérii tohto semestra, ale aj naše vzorové riešenia. Nezabúdaj však, že sme ešte len v polčase, tak určite nepoľavuj a pusti sa do druhej série. S radosťou očakávame tvoje ďalšie riešenia!

vedúci MATIKa

Ako bude

Lomihlav

Tak ako každý rok, aj tento rok nás čaká začiatkom decembra súťaž Lomihlav. Je to súťaž štvorčlenných družstiev určená pre žiakov siedmeho až deviateho ročníka základných škôl (alebo príslušných ročníkov viacročných gymnázií). Ich úlohou je vyriešiť čo najviac zo 40 matematických úloh, 4 hlavolamov a 4 hádaniek. Súťažiaci majú šancu sa niečo nové naučiť, porovnať svoje sily s ostatnými a stretnúť kamarátov so záľubou v matematike. Tento rok sa súťaž Lomihlav uskutoční v piatok 9.12.2022 v priestoroch Gymnázia, Alejová 1 v Košiciach. Registrovať sa môžete do 28.11.2022. Registračný formulár aj bližšie informácie o registrácii, súťaži a jej predchádzajúcich ročníkoch môžete nájsť na `https://matik.strom.sk/sk/lomihlav/`. Tešíme sa na vás!

Výlet

Mikulášsky výlet sa bude konať v sobotu 3.12.2022. Výlet je určený pre všetkých a je skvelou príležitosťou na to, aby ste sa stretli so starými kamarátmi zo sústredenia a spoznali nových. Pre viac informácií sledujte našu webstránku.

Vzorové riešenia 1. série úloh zimného semestra

1

opravovali: **Oskar Cacara** a **Erik Novák**
najkrajšie riešenie: Michal Válek

85 riešení

Zadanie

Tálec si pred odchodom do školy odložil svoj mamutí kel. Keď prišiel zo školy, kel bol fuč. Pri jeho hľadaní vyspovedal aj svojich kamarátov. Vedel, že jeden z nich klame a zvyšní hovoria pravdu. Toto mu povedali:

- Sapi: Tvoj kel má Ens.
- Ens: Neo kel nemá.
- Neo: Ander ti klame.
- Ander: Sapi má tvoj kel.

Kto Tálecovi klamal? Kto má jeho kel?

Riešenie

Najprv sa pozrime na vzťah medzi výrokmi Andera a Sapiho. Títo dvaja obviňujú z krádeže rôznych ľudí. Keďže vieme, že kel má iba jedna osoba, tak aspoň jeden z nich určite klame. Zo zadania však klame nanajvýš jeden, takže z nich klame práve jeden. Z tohto tvrdenia nám potom vyplýva, že bez ohľadu na to, či klame Sapi alebo Ander, tak Ens a Neo určite hovoria pravdu.

Z toho, že Neo hovorí pravdu vieme, že Ander klame. Na začiatku sme taktiež zistili, že práve jeden z dvojice Ander a Sapi klame. Už vieme, že klame Ander a teda Sapi hovorí pravdu. Sapi teraz pravdivo tvrdí, že kel má Ens.

Tálecovi teda klame Ander a jeho kel má Ens.

Komentár

Takmer všetci z vás prišli na správny výsledku, no nie všetci získali 9 bodov. Prečo? Pretože častokrát došlo k tomu, že úvahy neboli veľmi popísané. Jednoducho bolo napísané, že niekto hovorí pravdu, teda niekto klame, teda niekto má kel a je to vyriešené. To nám ako opravovateľom až tak nepomáha vidieť do toho, aké úvahy ste použili alebo aké všetky možnosti ste otestovali. Dávajte si na to prosím nabudúce pozor a radšej toho napíšte viacej, než menej, aby sme vám mohli dať plný počet bodov :)

2 opravovali: **Michal Masrna** a **Martin „Iskra“ Dudjak**

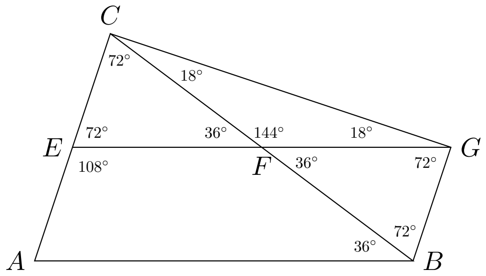
najkrajšie riešenie: Michal Vodička

56 riešení

Zadanie

Ander kreslil na stenu jaskyne trojuholník ABC. Stred strany AC označil E a stred strany BC označil F. Na priamke EF leží bod G taký, že $|EF| = |FG|$ pričom body E a G sú rôzne. Veľkosť uhla FEA je 108 stupňov a veľkosť uhla ABC je 36 stupňov. Aká je veľkosť uhla BGC?

Riešenie



Keďže sú body E a F stredmi strán BC a CA, úsečka EF je strednou priečkou trojuholníka ABC. Takže úsečky AB a EF sú rovnobežné a uhly ABC a EFC sú súhlasné uhly, čiže $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle EFC| = 36°$.

Z obrázku môžeme vidieť, že uhly AEF a CEF sú susedné. Uhol AEF je veľký $108°$, takže $|\sphericalangle CEF| = 180° - 108° = 72°$.

Vieme, že súčet vnútorných uhlov v trojuholníku EFC je $180°$, takže platí $|\sphericalangle FCE| = 180° - |\sphericalangle CFE| - |\sphericalangle FEC| = 180° - 36° - 72° = 72°$.

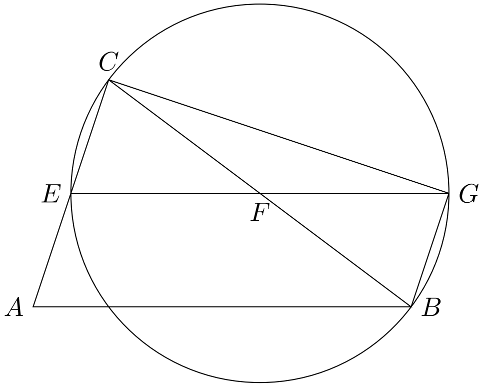
Vidíme, že trojuholník EFC je rovnoramenný s ramenami FC a EF, čiže ramená FC a EF sú rovnako dlhé. Zo zadania vieme, že bod F je stred úsečky EG a zároveň stred úsečky BC, čiže platí $|FC| = |FB| = |FG| = |EF|$.

Takže trojuholník CFG je rovnoramenný s ramenami FC a FG a uhlami FGC a FCG rovnako veľkými. Pretože sú uhly EFC a CFG susedné, bude $|\sphericalangle CFG| = 180° - |\sphericalangle EFC| = 180° - 36° = 144°$. Keďže je trojuholník CFG rovnoramenný, platí $|\sphericalangle FGC| = |\sphericalangle FCG| = \frac{180° - 144°}{2} = 18°$.
Rovnako trojuholník BGF je rovnoramenný s ramenami BF a FG a uhlami BGF a GBF rovnako veľkými. Uhol GFB je vrcholový k uhlu EFC, takže jeho veľkosť je tiež $36°$. Potom môžeme dorátať $|\sphericalangle BGF| = |\sphericalangle GBF| = \frac{180° - 36°}{2} = 72°$.

Napokon spočítame veľkosť uhla BGC ako $|\sphericalangle BGC| = |\sphericalangle FGC| + |\sphericalangle BGF| = 18° + 72° = 90°$.

Iné riešenie

Potom, čo sme zistili, že platí $|FC| = |FB| = |FG| = |EF|$ si môžeme všimnúť, že ak by sme opísali kružnicu trojuholníku CBG, tak by stred tejto kružnice bol v bode F a strana BC by bola priemerom tejto kružnice. Z Tálesovej vety potom vieme, že uhol nad priemerom kružnice, v našom prípade uhol BGC, je pravý a má preto veľkosť 90°.



Komentár

Teší nás, že sme medzi riešeniami dostali aj veľa rôznorodých správnych riešení :). Okrem tých dvoch postupov, ktoré sme si vybrali pre vzorové riešenia sa objavili aj riešenia využívajúce poznatky, že výška v rovnoramennom trojuholníku je kolmá na základňu, či riešenia, ktoré dokázali, že $EBGC$ je obdĺžnik.

Medzi najčastejšie chyby patrilo, že ste nejakú časť svojho riešenia nedostatočne, alebo vôbec neokomentovali. Ponaučením teda ostáva, že v riešení nie je potrebné šetriť slovami a každý váš krok je potrebné vysvetliť.

Na záver ostáva povedať, že sa objavili aj riešenia, ktoré sa situáciu snažili narysovať a odpoveď potom odmerať. Preto by sme radi pripomenuli, že keďže rysovanie a meranie je spravidla nepresné, nemôžeme takýmto riešeniam udeliť vysoký počet bodov.

3

opravovali: **Matúš „Libi“ Libák** a **Timka Szöllösová**
najkrajšie riešenie: Hana Ihnátova

68 riešení

Zadanie

Neo a Tálec hrali hru. Najprv Neo napísal čísla 1 až 6 do vrcholov pravidelného šesťuholníka. Potom si Tálec vybral vrchol a pričítal k nemu čísla v susedných vrcholoch. Tálec dá Neovi toľko mušlí, aký súčet mu vyšiel, pričom platí, že Tálec vyberá vrchol tak, aby dal Neovi čo najmenej mušlí a Neo píše čísla do vrcholov tak, aby dostal čo najviac mušlí. Koľko mušlí dostal Neo? Dokážte, že viac mušlí nemôže dostať.

Riešenie

Mušlí je dokopy 21. Takže aj celkový počet mušlí v dvoch protiľahlých trojiciach je 21 (všimnime si, že tieto trojice sa neprekrývajú). Keďže chceme dosiahnuť aby najmenší súčet bol čo najväčší, musíme rozdeliť 21 mušlí medzi tieto trojice tak, aby menší sčítanec bol čo najväčší, čiže 10 a 11. V tom prípade Neo dostane 10 mušlí. Keď už toto vieme, tak nájdeme rozloženie počtov postupne 1, 4, 5, 2, 3, 6 do kruhu, kedy toto platí.
Teraz dokážeme, že 10 je najviac, čo Neo môže dostať. Všimnime si, že súčet súčtov trojíc je 63 (počet mušlí pri každom vrchole je zarátaný trikrát, čiže 3×21), teda najmenší súčet trojice nemôže byť 11, lebo súčet súčtov by bol minimálne 66, čo neplatí. Teda sme dokázali aj to, že lepšie to skutočne nejde, a teda Neo môže skutočne získať najviac 10 mušlí.

Komentár

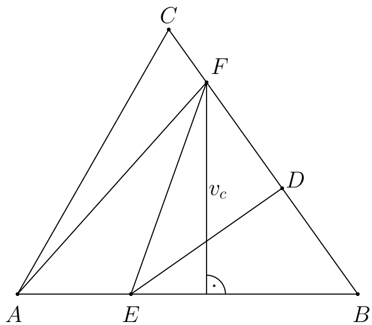
Vo väčšine riešení neohodnotených plným počtom bodov sa objavovali chyby ako nedostatočný, alebo až chýbajúci dôkaz, že dané rozloženie je naozaj riešením. Veľa z vás úlohu riešilo vypisovaním možností, no len v jednom prípade sme takémuto riešeniu udelili plný počet bodov - v ostatných prípadoch chýbal dôkaz (alebo vypísanie), že ostatné možnosti skutočne nevedú k výsledku a kvôli tomu niekoľkí správne riešenie ani nenašli.
Dobrá rada na záver teda znie, že ak vypisujete možnosti dajte si pozor, že ich vypíšete všetky a odôvodnite, že iné nie sú :).

4 opravovali: **Jano Richnavský** a **Oliver Seman** 38 riešení
najkrajšie riešenia: Lívia Lukáčová a Richard Prikler

Zadanie

Vstup do Anderovej jaskyne má tvar rovnostranného trojuholníka ABC so stranou dlhou 48 stôp. Na strane AB leží bod E a na strane BC ležia postupne body D a F tak, že obsahy trojuholníkov AFC, AEF, EDF a EBD sú rovnaké. Vypočítajte v stopách súčet dĺžok úsečiek $|EB| + |DB|$.

Riešenie



Trojuholníky AEF a BEF majú spoločný vrchol F a ich základne BE a AE ležia na tej istej priamke. Preto je výška v_c oboch týchto trojuholníkov na strany BE a AE totožná. Keďže sa trojuholník BEF skladá z trojuholníkov BDE a DEF, vieme, že jeho obsah (označme S_{BEF}) je dvakrát väčší ako obsah trojuholníka AEF. Platí teda:

$$2 \cdot S_{AEF} = S_{BEF}$$

Keď podľa vzorca na výpočet obsahu trojuholníka $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$ dosadíme dĺžky základní a výšok a následne upravíme, dostávame:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{|AE| \cdot v_c}{2} &= \frac{|EB| \cdot v_c}{2} && / \cdot 2 \\ 2 \cdot |AE| \cdot v_c &= |EB| \cdot v_c && / : v_c \\ 2 \cdot |AE| &= |EB| \end{aligned}$$

Zo zadania vieme, že $|AB| = 48$ stôp, preto $|AE| = 16$ stôp a $|EB| = 32$ stôp.
Zamerajme sa ďalej na trojuholník ABF. Tvoria ho trojuholníky AEF, BDE a DEF, čiže má trikrát väčší obsah ako trojuholník ACF. Oba trojuholníky majú spoločný vrchol A a ich základne BF a CF ležia na rovnakej priamke, čiže ich výška na strany BF a CF je totožná. Keďže ABF má trikrát väčší obsah ako ACF a výšku majú totožnú, tak podobne ako pri trojuholníkoch BEF a AEF platí, že $|BF| = 3 \cdot |CF|$. Keďže $|BC| = 48$ stôp, tak $|CF| = 12$ stôp a $|BF| = 36$ stôp.
Na záver sa pozrime na trojuholníky BDE a DEF. Majú spoločný vrchol E a ich základne BD a DF znova ležia na tej istej priamke, teda majú totožnú výšku na tieto strany. Navyše zo zadania vieme, že majú rovnaké obsahy. Podobnou úvahou ako v predchádzajúcich 2 prípadoch teda prichádzame na to, že $|BD| = |DF|$. Vieme, že $|BF| = 36$ stôp, čiže $|BD| = 18$ stôp aj $|DF| = 18$ stôp. To znamená, že $|EB| + |BD| = 32 + 18 = 50$ stôp.

Komentár

Niektorí riešitelia zvolili iný a pracnejší postup riešenia spojený s veľkým množstvom výpočtov - mnoho z nich medzivýsledky zaokrúhľovalo. Zaokrúhľovaním však strácame presnosť, a ak so zaokrúhlenými číslami ďalej počítame, nemôžeme sa dopracovať k presným a správnym výsledkom. Namiesto zaokrúhlených čísel musíme rátať s odmocninami alebo zlomkami v takom tvare, v akých sú. Iní riešitelia zvolili cestu goniometrickú - takéto riešenie (bez zaokrúhľovania!) môže byť správne, ale vedzte, že úlohy v Matiku sú vždy vymyslené tak, aby sme sa goniometrickým funkciám vedeli pohodlne vyhnúť ;).
Riešitelia, ktorí sa vydali cestou vzorového riešenia alebo jej veľmi podobnou (a takých bolo vskutku mnoho) nemali problém získať plný počet bodov.

5

opravovali: **Martin Masrna** a **Katka Farbulová**
najkrajšie riešenie: Ala Bálintová

32 riešení

Zadanie

Neo a Ander si myslia dve rôzne kladné celé čísla. Súčet ich najväčšieho spoločného deliteľa a najmenšieho spoločného násobku je rovný 323. Aké dvojice čísel si Neo a Ander mohli myslieť? Nájdite všetky možnosti a dokážte, že iné neexistujú.

Riešenie

Neovo číslo si označíme ako N a Anderovo číslo ako A, pričom platí, že $N = a \cdot c$, a $A = b \cdot c$, kde a a b sú nesúdeliteľné a a, b, c sú celé kladné čísla. Najväčší spoločný deliteľ čísel N a A bude c a najmenší spoločný násobok bude $a \cdot b \cdot c$. Bez ujmy na všeobecnosti nech $a \leq b$.

Vieme, že súčet najväčšieho spoločného deliteľa a najmenšieho spoločného násobku je rovný 323, teda $c + a \cdot b \cdot c = c \cdot (1 + a \cdot b) = 323$. Takže 323 je súčin dvoch čísel, a to čísla c a čísla $(1 + a \cdot b)$. Delitele 323 sú $1, 17, 19$ a 323. Postupne rozoberieme možnosti pre c:

- ak $c = 1$, tak $(1 + a \cdot b) = 323$, takže $a \cdot b = 322$. Prvočíselný rozklad 322 je $2 \cdot 7 \cdot 23$. Dvojice (a, b) preto môžu byť $(1, 322)$; $(2, 161)$; $(7, 46)$ alebo $(14, 23)$. Keďže $c = 1$, Neove a Anderove čísla môžu byť rovnako 1 a 322, 2 a 161, 7 a 46 alebo 14 a 23.

- ak $c = 17$, tak $(1 + a \cdot b) = 19$, takže $a \cdot b = 18$. Prvočíselný rozklad 18 je $2 \cdot 3^2$, dvojice (a, b) preto môžu byť $(1, 18)$ alebo $(2, 9)$ - $(3, 6)$ nie, lebo majú byť nesúdeliteľné. Keďže $c = 17$, tak $N = a \cdot 17$ a $A = b \cdot 17$. Potom Neove a Anderove čísla môžu byť 17 a 306 alebo 34 a 153.

- ak $c = 19$, tak $(1 + a \cdot b) = 17$, takže $a \cdot b = 16$. Prvočíselný rozklad 16 je 2^4, teda dvojica (a, b) môže byť iba $(1, 16)$ - $(2, 8)$ ani $(4, 4)$ nie, lebo majú byť nesúdeliteľné. Neove a Anderove čísla môžu byť iba 19 a 304.

- ak $c = 323$, tak najmenší spoločný násobok je $323–323 = 0$. Najmenší spoločný násobok ale nemôže byť 0, takže neexistuje možnosť, kde by najväčší spoločný deliteľ bol 323.

Neove a Anderove čísla môžu byť tieto dvojice: 1 a 322, 2 a 161, 7 a 46, 14 a 23, 17 a 306, 34 a 153 alebo 19 a 304.

Komentár

Najdôležitejším krokom pri riešení úlohy bolo uvedomiť si, že najväčší spoločný deliteľ musí deliť číslo 323. Mnohí z vás našli iba možnosti, kde myslené čísla boli nesúdeliteľné. Naopak, niektorí si neuvedomili, že ak zapíšeme čísla ako $N = a \cdot c$, a $A = b \cdot c$, kde c je najväčší spoločný deliteľ, tak a a b musia byť nesúdeliteľné. Došli ste tak okrem správnych možností aj ku niekoľkým nesprávnym. Tejto chybe sa dalo pomerne ľahko vyhnúť, stačilo iba urobiť skúšku správnosti pre všetky možnosti, ktoré vám vyšli, a hneď by ste videli, že medzi nimi máte niektoré navyše. Napriek tomu všetkému nás potešilo nemalé množstvo správnych a pekných riešení.

6 opravovali: **Martin „Kopy“ Kopčány** a **Martin Števko** 37 riešení
najkrajšie riešenie: Michal Vodička

Zadanie

Ander a Tálec písali do piesku čísla nasledovným spôsobom: Začali dvomi ľubovoľnými číslami a každý ďalší člen vznikol ako súčet cifier predchádzajúcich dvoch členov. Napríklad, ak začneme s číslami 5 a 8, tak začiatok postupnosti vyzerá takto: $5, 8, 13, 12, 7, 10, \ldots$

a) Dokážte, že ak prvé dva členy postupnosti sú ľubovoľné čísla menšie ako milión, tak potom štvrtý aj piaty člen je menší ako 100.

b) Dokážte, že ak prvé dva členy postupnosti sú ľubovoľné čísla menšie ako 100, tak v postupnosti existuje člen taký, že všetky za ním nasledujúce čísla sú menšie ako 21.

c) Dokážte, že ak prvé dva členy postupnosti sú ľubovoľné čísla menšie ako 100, tak v postupnosti existuje aj člen taký, že všetky za ním nasledujúce čísla sú menšie ako 19.

Riešenie

a) V prvej podúlohe sa pozrime na maximálne počty cifier. Na 1. a 2. mieste môže byť najviac 6–ciferné číslo. Na 3. mieste je potom najväčšie možné číslo $9 \cdot (6 + 6) = 108$, teda 3–ciferné, na 4. mieste $9 \cdot (6 + 3) = 81$, teda 2–ciferné, a na 5. mieste rovnako 2–ciferné ($9 \cdot (3 + 2) = 45$). No a najviac dvojciferné čísla sú určite menšie ako 100.

b) „*Ak máme niekde v postupnosti bezprostredne za sebou dve čísla, ktoré sú menšie ako 21, tak aj všetky nasledovné čísla budú menšie ako 21.*“ Toto tvrdenie platí preto, lebo všetky čísla do 21 majú najväčší možný ciferný súčet rovný 10, a teda nikdy nemôžeme vystúpiť nad číslo $10 + 10 = 20$.

Ukážme teraz, že ak sú prvé dve čísla menšie ako sto, tak niekde v postupnosti budú za sebou dve čísla menšie ako 21.

Ak nás zaujíma najväčšie číslo na nejakej pozícii, musíme sčítať najväčšie možné ciferné súčty predošlých 2 čísel. Do prvého riadku tabuľky nižšie napíšeme najväčšie možné číslo na danej pozícii. Z čísel, ktoré sú menšie alebo rovné ako toto číslo, potom do druhého riadku napíšeme to, ktoré má najväčší ciferný súčet. Nakoniec do posledného riadku napíšeme tento ciferný súčet.

poradie v postupnosti	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
najväčšie možné číslo	99	99	36	29	22	21	20	20
číslo s najväčším cif. súčtom	99	99	29	29	19	19	19	19
najväčší ciferný súčet	18	18	11	11	10	10	10	10

Keďže na siedmom a ôsmom mieste postupnosti sa nachádzajú čísla menšie ako 21, tak vďaka tvrdeniu vyššie aj všetky nasledovné členy postupnosti musia byť menšie ako 21.

c) V tretej podúlohe budeme vychádzať z druhej podúlohy a uvažovať budeme už len časť postupnosti, v ktorej sú všetky čísla menšie ako 21.

„*Ak by sa v postupnosti bezprostredne za sebou vyskytli dve čísla menšie ako* 19*, tak aj všetky čísla za nimi budú menšie ako* 19*.*“ Toto vylepšené tvrdenie platí preto, lebo najväčší možný ciferný súčet čísla menšieho ako 19 je 9 a z dvoch čísel s ciferným súčtom menším ako 10 už čísla 19 a 20 nemôžu vzniknúť.

To zároveň znamená, že ak niekde v postupnosti máme dostať číslo 19 alebo 20, aspoň jedno z predošlých 2 čísel muselo byť 19 (pre 20 dokonca obe). Nastane teda jedna z nasledujúcich 3 situácií:

1) 19, 19, 20 – pokračuje číslami 12 a 5, na ktoré aplikujeme naše vylepšené tvrdenie,
2) x, 19, 19 – pokračuje číslom 20 a ďalej rovnako ako 1. možnosť,
3) 19, y, $19 - y$ tu musí mať ciferný súčet práve 9 (lebo $1+9+y = 19$), a teda postupnosť bude pokračovať číslom 19 a ďalej rovnako ako 2. možnosť.

To však znamená, že čísla 19 a 20 sa buď v našej postupnosti nebudú vyskytovať vôbec (a potom vieme vylepšené tvrdenie aplikovať priamo), alebo sa niekde vyskytnú, čím sa dostaneme k číslam 12 a 5 a aplikujeme vylepšené tvrdenie na ne. Úloha je teda dokázaná.

Komentár

Väčšina z vás bohužiaľ úlohu nezvládla vyriešiť správne aj napriek tomu, že ste si to mysleli. Vo všeobecnosti sa dá povedať, že body ste strácali za jednu z dvoch chýb. Prvá z nich bola nesprávna interpretácia výroku „Dokážte, že pre ľubovoľné čísla platí...“ a druhá, častejšia chyba, bola hľadanie „najhoršieho prípadu“, ktorý vôbec nebol tak zrejmý, ako sa mohlo zdať a zrejmé nebolo ani to, či vôbec existuje. V matematike celkovo sa teda uvažovaniu o „najhorších prípadoch“ odporúča úplne vyhnúť, pretože môže veľmi jednoducho viesť k chybe.
Teší nás však, že aj napriek tomu, že veľa z vás nemalo všetky podúlohy, nebáli ste sa poslať aspoň tú časť, ktorú ste mali a získali ste tak nejaké body.

Zadania 2. série úloh zimného semestra

Riešenia pošlite najneskôr do **28. novembra 2022**

Úloha 1

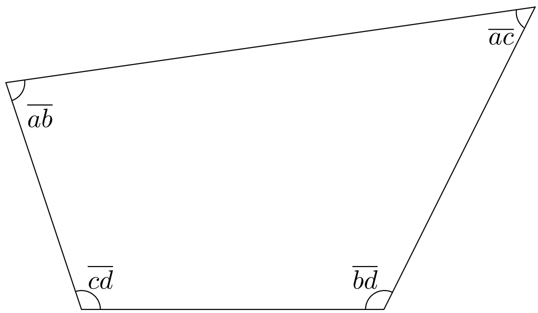
Ohnisko tvaru obdĺžnika $ABCD$ má stranu AB dlhú 3 stopy a stranu BC dlhú 1 stopu. Bod E je vzdialený pol stopy od úsečky CD, leží mimo obdĺžnika $ABCD$ a $|CE| = |DE|$. Aká je veľkosť uhla AEB?

Úloha 2

U Nea na narodeninovej oslave sú chlapci a dievčatá a každý s každým sa buď pozná, alebo nepozná (je to vzájomné). Vieme, že na oslave je 12 chlapcov a každý z nich pozná 6 dievčat. Tiež vieme, že každé dievča pozná rovnaký počet chlapcov ako ostatné dievčatá. Koľko je na oslave dievčat? Nájdite všetky možnosti a dokážte, že iné nie sú.

Úloha 3

Kožušina z mamuta má tvar štvoruholníka. Veľkosti uhlov štvoruholníka sú čísla zložené z cifier a, b, c, d ako na obrázku. Nájdite všetky možné veľkosti uhlov a vysvetlite, prečo iné veľkosti uhlov nevyhovujú. Obrázok je iba ilustračný.



Úloha 4

Tálec s Anderom sa zamýšľali nad domácou úlohou z matematiky. Hľadali všetky prvočísla, ktoré sa nedali zapísať ako súčet dvoch zložených čísel. Pomôžte im ich nájsť a dokážte, že žiadne ďalšie neexistujú.

Úloha 5

Neo si zvolil nejaké číslo k. Následne k jaskynnej stene prišiel Tálec a napísal nejakých $k + 2$ rôznych kladných celých čísel. Dokážte, že medzi číslami na stene sa určite nachádza buď dvojica čísel s rozdielom deliteľným $2k$, alebo dvojica čísel so súčtom deliteľným $2k$.

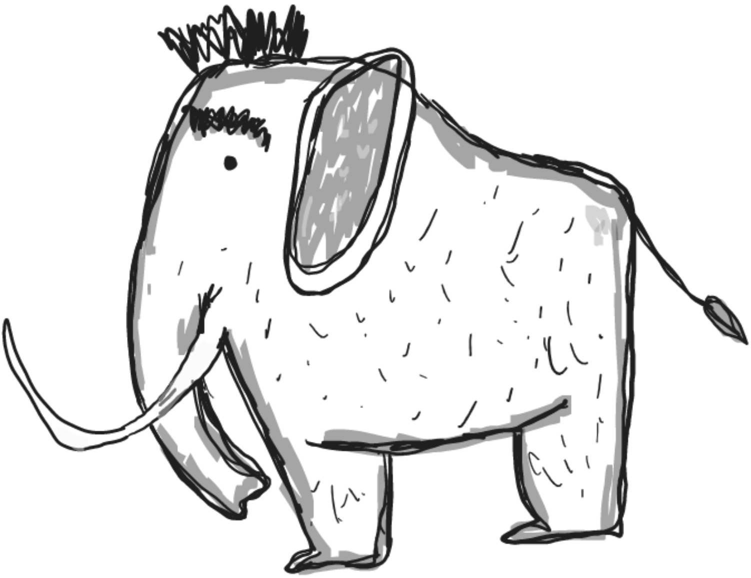
Úloha 6

Hrot Anderovho oštepa je tvaru trojuholníka ABC, kde dĺžka úsečky AC je 12 palcov a veľkosť uhla ACB je 120 stupňov. Os tohto uhla pretína stranu AB v bode D. Taktiež vieme, že $|AE| = |EC| = |CB|$, kde E je stred strany AC. Koľko palcov má úsečka CD? Dĺžku je potrebné vyjadriť presne, a teda bez pomoci rysovania.

Poradie po 1. sérii zimného semestra

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
1. - 7.	Alenka Bálintová	Z9	BGMHSuč	9	9	9	9	9	9	54
	Marie Kasalová	Z8	GTruhla	9	9	9	9	9	4	54
	Nina Hudáková	Z8	GAlejKE	9	9	9	9	9	9	54
	Hana Erdélyiová	Z7	GAMČABA	9	9	9	9	9	2	54
	Alena Chladná	Z7	GAMČABA	9	9	9	9	8	9	54
	Michal Vodička	Z9	GAlejKE	9	9	9	9	9	9	54
	Nelka Kleščová	Z7	GĽŠH3ZV	9	9	9	9	9	-	54
8.	Tomáš Cabúk	Z7	ZGrunKK	9	9	9	9	7	7	52
9.	Hana Ihnátová	Z7	ZObcSeč	9	9	9	9	5	0	50
10. - 11.	Richard Prikler	Z9	GJARMPO	9	9	9	9	9	4	49
	Magdaléna Škriabová	Z8	ZKro4KE	9	9	9	9	4	-	49
12. - 16.	Janka Urbánová	Z9	GAlejKE	9	9	5	9	9	6	47
	Daniela Tkáčová	Z7	ZLevoSN	9	9	9	9	2	2	47
	Vojto Bálint	Z7	CZRZaZA	9	9	9	-	7	4	47
	Ľuboš Šesták	Z8	ZVývoBA	9	9	6	9	7	0	47
	Lívia Lukáčová	Z8	ZPoliKE	9	8	9	9	4	2	47
17.	Kristina Jančigová	Z8	ZGoraZA	9	9	9	8	3	0	46
18. - 19.	Jakub Katrák	Z7	ZPoliKE	9	9	9	7	1	2	45
	Michal Revický	Z7	GJARMPO	9	6	9	8	4	3	45
20. - 21.	Martina Osuská	Z9	ZDrJDMA	9	9	9	6	9	-	42
	Sara Vojtkova	Z8	ZPoliKE	9	8	7	7	4	-	42
22.	Michael Dudáš	Z7	GAlejKE	9	9	7	7	-	-	41
23.	Samuel Švec	Z7	ZKro4KE	9	1	8	9	3	-	39
24.	Lívia Sušková	Z8	EGJAKKE	9	9	8	5	-	-	36
25. - 26.	Natália Kropuchová	Z7	ZKro4KE	9	7	9	-	-	-	34
	Maxim Boczek	Z9	GAlejKE	9	9	7	9	-	-	34
27. - 28.	Daniel Takáč	Z7	GAlejKE	9	9	5	-	-	0	32
	Peter Ďurica	Z7	GAlejKE	9	-	2	-	9	3	32
29. - 31.	Hana Hricová	Z8	ZKro4KE	9	2	9	9	-	0	31
	Šimon Petráš	Z7	GAMČABA	9	9	1	1	-	2	31
	Lukáš Kostík	Z8	GAlejKE	6	5	5	9	1	0	31
32. - 35.	Boris Köröš	Z9	GAlejKE	6	9	6	9	-	-	30
	Tomáš Kováč	Z7	ZZlatáRV	9	1	5	1	7	0	30
	Dominik Feňovčík	Z7	ZBeleKE	9	5	8	-	-	-	30
	Olívia Kovaľová	Z7	ZJuhVnT	5	9	8	-	-	-	30
36. - 37.	Sarah Klopstock	Z9	ŠpMNDaG	8	9	9	2	-	1	29
	Michal Ferdinandy	Z9	GAlejKE	9	9	9	-	-	2	29
38.	Heidi Hritz	Z8	GsvTAKE	9	9	7	-	-	-	25
39. - 40.	Ondrej Tóth	Z9	GVaršZA	9	-	7	5	0	2	23
	Laura Prevužňáková	Z7	ZKro4KE	9	-	7	-	-	-	23
41.	Barbora Brindžáková	Z8	ZKro4KE	9	9	2	-	1	0	22
42. - 43.	Lukáš Paška	Z8	ZKe30KE	9	1	6	-	4	0	21
	Sofia Grofčíková	Z7	GStolaPRG	6	6	-	-	3	-	21
44.	Damián Fedor	Z7	ZJuhVnT	7	0	6	-	-	-	19
45. - 50.	Barbora Menšíková	Z8	ZKro4KE	9	9	-	-	-	-	18
	Dávid Krivjanský	Z8	ZŠverHE	9	4	5	-	-	-	18
	Lukáš Dankanin	Z8	ZKro4KE	9	-	9	-	-	-	18
	Daniela Harmanska	Z8	ZKro4KE	9	8	1	-	-	-	18
	Barbora Ševcová	Z7	ZKro4KE	6	6	-	-	-	-	18

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
	Daniela Štulajterová	Z7	ZKro4KE	6	-	6	-	-	-	18
51. - 53.	Tomáš Lang	Z9	ZOKožSN	6	9	-	2	-	-	17
	Tobias Papp	Z7	ZSNP1HE	5	-	7	-	-	-	17
	František András	Z8	ZJŠveHE	7	2	6	1	-	0	17
54. - 55.	Michal Válek	Z8	ZKro4KE	9	7	-	-	-	-	16
	Sofia Sotakova	Z6	ZJŠveHE	4	6	2	-	-	-	16
56. - 57.	Rodan Levický	Z9	GAlejKE	9	-	5	-	-	1	15
	Martin Vrba	Z9	ZKro4KE	9	-	6	-	-	-	15
58.	Hana Benejová	Z8	ZJŠveHE	6	5	-	1	1	-	14
59. - 60.	Šarlota Šustová	Z8	ZKro4KE	9	-	2	-	-	-	11
	Robbin Šimko	Z7	ZKro4KE	9	-	1	-	-	-	11
61. - 62.	Gorazd Korečko	Z8	ZKro4KE	9	-	1	-	-	-	10
	Nicolas Buhaj	Z8	ZŠverHE	3	7	0	0	-	0	10
63. - 65.	Miriam Varechová	Z8	ZKro4KE	9	-	-	-	-	0	9
	Jakub Stramba	Z8	ZKro4KE	0	-	9	-	-	-	9
	Samuel Šimurda	Z8	ZKro4KE	9	-	0	-	-	-	9
66. - 68.	Soňa Grofčíková	Z9	ZLNovKE	-	-	8	-	-	-	8
	René Ivan	Z8	ZKro4KE	2	6	-	-	-	-	8
	Timea Payerová	Z9	GAlejKE	3	-	5	-	-	-	8
69.	Ján Štiavnický	Z9	ZKro4KE	6	-	-	1	-	-	7
70. - 75.	Šimon Varga	Z8	ZKro4KE	0	6	-	-	-	-	6
	Martin Azari	Z8	ZKro4KE	6	-	0	-	-	-	6
	Max Hložek	Z7	ZKro4KE	6	-	0	-	-	-	6
	Adela Polomská	Z7	ZKro4KE	6	-	-	-	-	0	6
	Anna Birková	Z8	ZKro4KE	6	-	-	-	-	0	6
	Alex Juhásová	Z8	GAlejKE	5	0	0	1	-	0	6
76. - 78.	Martin Janoško	Z7	ZKro4KE	5	-	-	-	-	-	5
	Matúš Katina	Z7	ZKro4KE	3	1	-	-	-	-	5
	Ema Milá	Z9	GAlejKE	4	-	1	-	-	-	5
79.	Róbert Plencner	Z7	ZKro4KE	4	-	0	-	-	-	4
80.	Richard Orosz	Z8	ZKro4KE	3	-	-	-	-	-	3
81. - 82.	Tomáš Polomský	Z9	ZKro4KE	2	-	-	-	-	0	2
	Juraj Pastirčák	Z7	ZJuhVnT	0	-	2	-	-	-	2
83.	Martin Babík	Z7	ZKro4KE	1	-	-	-	-	-	1
84. - 85.	Marko Strompf	Z8	ZKro4KE	0	-	-	-	0	-	0
	František Krč	Z8	ZKro4KE	0	-	-	-	-	-	0



Názov:	*MATIK* – korešpondenčný matematický seminár Číslo 2 • November 2022 • Zimný semester 36. ročníka
Web:	`matik.strom.sk`
E-mail:	`matik@strom.sk`
Riešenia:	Prijímame odovzdaním na webe, poštou a len v prípade poruchy na adrese `riesenia@strom.sk`
Organizátor:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Šrobárova 2, 041 54 Košice Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.