Korešpondenčný Matematický Seminár

MATIK

Číslo 6 — Ročník 34 matik.strom.sk

Ahoj!

Je tu ďalší časopis *MATIK*a, ktorý prináša vzorové riešenia druhej série. Okrem toho, že je posledný v tomto semestri, je výnimočný aj tým, že s ním prichádzajú aj pozvánky pre tých najšikovnejších z vás. Tí sa môžu tešiť na odmenu vo forme týždňového netradičného sústredenia v obklopení skvelými účastníkmi a vedúcimi (samozrejme, ak to aktuálna situácia dovolí). Ak sa ti tam tentoraz nepodarilo dostať, nezúfaj. Pevne veríme, že nabudúce sa s Tebou uvidíme!

vedúci *MATIK*a

2% z daní

Aj tento rok môžu vaši rodičia venovať 2% zo svojich daní verejnoprospešným organizáciám, ako sme my (dokonca niektorí až 3%).
Peniaze získané z 2% využívame na pokrytie časti nákladov spojených s aktivitami pre vás (kopírovanie časopisov, poštovné, ceny na súťažiach, aktivity na sústredeniach…).
Chceme vás preto poprosiť, aby ste rodičom, členom svojej blízkej aj vzdialenej rodiny, susedom a pokojne aj cudzím ľuďom na ulici porozprávali o našich aktivitách a poprosili ich, aby svojou troškou podporili našu dobrovoľnícku činnosť a pomohli tým skupine mladých cieľavedomých ľudí zabezpečujúcich chod týchto úžasných seminárov, ktoré tak zbožňujete. Porozprávajte im, čo pre vás znamená sústredenie, čo vám dáva riešenie úloh semináru, a vysvetlite im, že takto podporia aj váš rozvoj a prispejú k zmysluplnému tráveniu vášho voľného času.
Potrebné informácie o tom, ako darovať 2%, nájdete na stránke nášho združenia `https://zdruzenie.strom.sk/sk/zdruzenie/2percenta/` a radi vám odpovieme na ľubovoľné otázky ohľadom našej podpory aj mailom na `info@strom.sk`.
Ďakujeme!

Tábor mladých matematikov

Čo by to boli za prázdniny bez TMMka? To veru nevieme. No sme si istí, že tento rok to určite zistiť nechceme! Preto aj tento rok chystáme pre budúcich siedmakov ZŠ až budúcich druhákov SŠ Tábor mladých matematikov, ktorý sa bude konať **23. – 30. augusta 2021 v ŠvP Detvianska Huta**!
Pýtaš sa, čo je to TMM? Ide o 8-dňový pobyt nabitý zaujímavým programom, v ktorom nesmie chýbať zábava, matematika a príjemná spoločnosť. Pozvánku s podrobnými informáciami a prihlášku nájdeš na našich webových stránkach. Nezabudni však, že kapacita je obmedzená, preto s prihlásením nečakaj na poslednú chvíľu. Tešíme sa na Teba!

Vzorové riešenia 2. série úloh letného semestra

1 opravovali: **Martin Masrna** a **Mirka Horváthová**
najkrajšie riešenia: Natália Tkáčová a Ľubomíra Šenitková

30 riešení

Zadanie

Prednedávnom si ešte traja bratia Chulio, Vincenzo a Giovanni Tortelliniovci rozdeľovali rodinné peniaze v pomere 4 : 5 : 6, najmenej dostával mladý Chulio a najviac najstarší Giovanni. Po tom, ako Giovanniho našli mŕtveho vo vlastnej komnate, Chulio navrhol, že si Giovanniho časť rozdelia s Vincenzom na polovice. Vincenzo však trval na tom, aby si aj túto časť rozdelili nerovnomerne ako zvyčajne, teda v pomere 4 : 5. Vincenzo by totiž podľa Chuliovho návrhu dostal o 4000 lýr menej ako podľa svojho. Koľko peňazí má dokopy rodina Tortelliniovcov?

Riešenie

Najprv si označme ich podiely c (Chulio), v (Vincenzo) a g (Giovanni). Následne si pomer 4 : 5 : 6 vieme zapísať ako $c : v : g$. Teda $c : v : g = 4 : 5 : 6$.
Teraz sa pozrime na Giovanniho podiel. Ak by si ho Chulio a Vincenzo delili podľa Chulia, rozdelili by si ho spravodlivo, teda v pomere 1 : 1. Chulio aj Vincenzo by teda dostali každý rovnako, a to $\frac{1}{2}g$. Dokopy by teda Chulio dostal $c+\frac{1}{2}g$ a Vincenzo by dostal $v+\frac{1}{2}g$.

Ak by si Giovaniho dedičstvo delili podľa Vincenza, rozdelili by si ho v pomere 4 : 5. Chulio by teda dostal $c+\frac{4}{9}g$ a Vincenzo by dostal $v+\frac{5}{9}g$ (ak si delia v pomere 4 : 5, tak si delia 9 dielov - jeden dostane 4 diely a druhý 5). Vieme, že ak by sa delili podľa Chulia, tak by Vincenzo dostal o 4000 lýr menej. Obe situácie si teda teraz vieme zapísať nasledovne (ľavá strana rovnice označuje delenie podľa Chulia a pravá strana rovnice delenie podľa Vincenza). Pomocou nich si vypočítame, koľko mal pôvodne zdediť Giovanni:

$$\begin{aligned} v+\frac{1}{2}g+4000 &= v+\frac{5}{9}g \qquad && /-v \\ \frac{1}{2}g+4000 &= \frac{5}{9}g && /\cdot 18 \\ 9g+72000 &= 10g && /-9g \\ g &= 72000 \end{aligned}$$

Zistili sme, že Giovanniho podiel bol 72000. Týchto 72000 teda predstavuje 6 dielov z pôvodného pomeru 4 : 5 : 6. Ak delíme dedičstvo v takomto pomere, máme 15 dielov. Ak je 6 dielov rovných 72000, tak jeden diel bude 12000 (teda $72000 \div 6$).

Z tejto informácie už jednoducho dopočítame, že celkové dedičstvo bude $15 \cdot 12000 = 180000$.

Komentár
Úloha nebola náročná, o čom svedčí vysoké množstvo 9 bodových riešení. Nezabúdajte však aj pri riešení jednoduchých úloh všetky myšlienky vysvetliť, a nespoliehajte sa na to, že si opravovatelia domyslia, čo ste sa im snažili povedať.

2
opravovali: **Robo Sabovčík** a **Bia Gurská**
najkrajšie riešenia: Natália Poliačiková

29 riešení

Zadanie
Na maškarné bály v Palazzo di Arcobaleno je každý rok pozvaných 21 hostí. Na posledných dvoch báloch sa zakaždým rozdelili do troch sál po sedem hostí. Ukážte, že niektorí traja hostia boli na oboch báloch spolu v jednej sále.

Riešenie
Tvrdenie budeme dokazovať sporom. Vezmime si 7 hostí z jednej sály na prvom bále. Pre spor ich teda skúsime rozdeliť na druhom bále do 3 sál tak, aby v žiadnej sále neboli viac ako dvaja. Avšak (z Dirichletovho princípu), v jednej sále musia byť aspoň traja hostia, pretože $2 \cdot 3 = 6$, a teda ak by sme do každej sály dali len dvoch hostí, jeden hosť by nám ostal nezaradený. Takto sme prišli ku sporu, a preto vieme povedať, že niektorí traja hostia boli na oboch báloch spolu v jednej sále.

Komentár
Úlohu ste takmer všetci vyriešili na 9 bodov, preto je pomerne ťažké písať komentár. Nabudúce si však skúste dať pozor, že vaše myšlienky naozaj spíšete správnym spôsobom tak, aby zachytávali vaše riešenie čo najpresnejšie. To je extrémne podstatné najmä pri ľahších úlohách (ako táto), kde vás každá drobná chyba stojí nejaké body.

Táto úloha je učebnicovým príkladom na Dirichletov princíp, ale ako zo vzorového riešenie môžete vidieť, dala sa vyriešiť aj bez jeho priamej zmienky. Dirichletov princíp je v matematických úlohách veľmi často využívaný, a preto sme radi, že všetci z vás zvolili správny spôsob uvažovania a tento princíp (či už vedome alebo nevedome) použili.

3 opravovali: **Lujza Milotová** a **Matúš Masrna**

najkrajšie riešenia: Martin Franek

20 riešení

Zadanie

Bianca prišla na to, že ju Vincenzo podvádza a tak sa s ním pohádala, že lietali taniere. Konkrétne lietal jeden tanier tvaru 101-uholníka. Najprv hodila tanier o zem Bianca a tým ho rozdelila pozdĺž ľubovoľnej uhlopriečky (Bianca aj Vincenzo vedia vždy hodiť tanier tak, aby sa rozdelil pozdĺž nimi zvolenej uhlopriečky) na dva mnohouholníky. Následne Vincenzo zobral zo zeme jeden z črepov tvaru mnohouholníka a znova ho hodom o zem roztrieštil na dva mnohouholníkové črepy pozdĺž ním zvolenej uhlopriečky. Takto striedavo hádžu črepy o zem, pričom hádku prehrá ten, kto už nemôže rozbiť žiaden črep. Kto z nich má vyhrávajúcu stratégiu a akú? Svoju odpoveď zdôvodnite.

Riešenie

Hádka skončí, keď sa tanier rozbije na samé trojuholníkové kusy. Trojuholníky už nemožno ďalej rozbiť, keďže nemajú uhlopriečku. Zároveň každý štvor-a viac-uholník uhlopriečku má a teda ho podľa nej možno rozbiť.

Keď už vieme, ako bude rozbitý tanier na záver vyzerať, poďme zistiť, koľko tých trojuholníkov na konci bude. Na začiatku máme spolu jeden kus taniera a 101 vrcholov. Každým rozbitím sa počet kusov zvýši o 1. Súčet vrcholov sa zvýši o 2, pretože vrcholy, ktoré spájala uhlopriečka, pozdĺž ktorej sme daný kus rozbili, budú po rozbití aj v pôvodnom aj v novom kuse. Takto budeme mať po prvom ťahu 2 kusy a 103 vrcholov, po druhom ťahu 3 kusy a 105 vrcholov a tak ďalej.

Keď takto postupne dôjdeme do stavu, v ktorom máme v súčte trikrát viac vrcholov ako kusov taniera, znamená to, že všetky kusy sú už trojuholníky, ktoré ďalej deliť nemôžeme, a teda hra skončí. To si vieme zapísať do rovnice $3(1+x) = 101+2x$, teda $x = 101-3$. Čiže po 98 ťahoch, kedy máme $1+98 = 99$ kusov taniera a $101+2\cdot 98 = 297$ vrcholov sme sa dostali do stavu, kedy máme už len samé trojuholníky.

Hádka teda vždy končí po 98 ťahoch, čo je párny počet, a teda ju ukončí druhý hráč. Tým pádom vyhrá vždy Vincenzo, bez ohľadu na to, ako hádka bude prebiehať.

Komentár

Úloha sa mohla na prvý pohľad zdať celkom strašidelná. Napriek tomu asi každý z vás prišiel k myšlienke, že hra skončí, keď budeme mať samé trojuholníky a záleží iba na tom, koľko ťahov budeme potrebovať na dosiahnutie tohto konca. Najčastejšie sa chyby vyskytovali práve v odôvodňovaní nájdenia tohto počtu. Pri úlohe sa totiž bolo treba zamyslieť nad všetkými možnými prípadmi. Bude počet trojuholníkov na konci vždy rovnaký, nezáležiac od toho, aké ťahy budú robiť? Bude musieť byť počet ťahov, ktorými sa k danému počtu trojuholníkov dopracujú, vždy rovnaký?

Ak niečo platí pri menších n-uholníkoch, bude to platiť aj pri každom ďalšom n-uholníku, a teda aj pri našom 101-uholníku? Tí z vás, ktorí nám aspoň nejakým spôsobom objasnili odpovede na otázky takýchto a podobných prípadov, si vyslúžili 9 bodov.

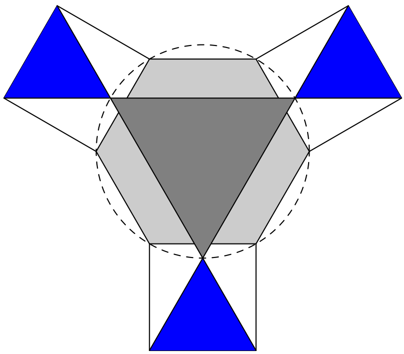
4

opravovali: **Mimi Hanus** a **Lenka Hake**
najkrajšie riešenie: Katarína Farbulová

27 riešení

Zadanie

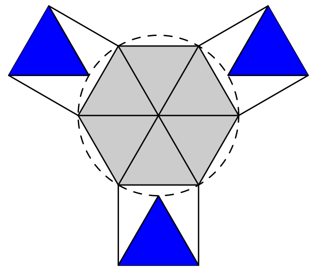
Na obrázku vidíte plán Palazzo di Arcobaleno zložený z pravidelných mnohouholníkov. Sála na prízemí tvaru šesťuholníka a jedáleň na prvom poschodí tvaru tmavosivého trojuholníka sú vpísané do tej istej kružnice. Každá z troch rovnakých komnát tvaru modrého trojuholníka má obsah 17. Určte obsah jedálne.



Riešenie

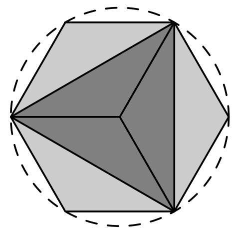
Pravidelný mnohouholník je taký, v ktorom majú všetky strany a všetky vnútorné uhly rovnakú veľkosť. Označme si dĺžku strany 6-uholníkovej sály a. Ak spojíme vrcholy pravidelného 6-uholníka so stredom jeho kružnice opísanej, tieto spojnice ho rozdelia na 6 rovnostranných trojuholníkov s rovnakou dĺžkou strany, akú má daný 6-uholník (každý z trojuholníkov je rovnoramenný s uhlom o veľkosti $360°/6 = 60°$ pri hlavnom vrchole, a teda $(180° - 60°)/2 = 60°$ pri základni). 6-uholníkovú sálu takto vieme rozdeliť na 6 rovnostranných trojuholníkov so stranou dĺžky a.

Môžeme si všimnúť, že všetky 3 štvorce na plániku majú jednu stranu identickú so stranou 6-uholníkovej sály, takže všetky ich strany majú tiež dĺžku a. Potom musia mať dĺžku a aj všetky strany tmavomodrých komnát, keďže majú tvar pravidelných trojuholníkov a každá má jednu stranu identickú so stranou niektorého štvorca. Z toho vyplýva, že trojuholníky tvoriace 6-uholníkovú sálu sú zhodné s trojuholníkovými komnatami, takže obsah sály je rovný šesťnásobku obsahu komnaty $6 \cdot 17 = 102$.



Ďalej si môžeme všimnúť, že pravidelný trojuholník predstavujúci jedáleň vieme otočiť tak, aby jeho vrcholy ležali vo vrcholoch 6-uholníkovej sály. Keďže sála má pravidelný tvar, tak spojením každého druhého jej vrcholu vznikne pravidelný trojuholník vpísaný do rovnakej kružnice ako ten predstavujúci jedáleň. Tieto 2 trojuholníky preto musia byť zhodné a tým pádom mať aj rovnaký obsah.

Teraz si predstavme 6-uholníkovú sálu s už otočenou jedálňou. Vrcholy sály, do ktorých sme otočili vrcholy jedálne, spojíme so stredom kružnice opísanej obom útvarom. Tieto spojnice majú veľkosť polomeru kružnice opísanej 6-uholníkovej sále, t. j. a. Celú 6-uholníkovú sálu tak vlastne rozdelíme na 6 rovnoramenných trojuholníkov s ramenami dĺžky a a základňou na niektorej zo strán otočenej jedálne. Tieto rovnoramenné trojuholníky sú zjavne zhodné, keďže majú zhodné veľkosti strán. Preto aj ich obsahy musia byť rovnaké, a to šesťkrát menšie ako obsah celej sály: $102/6 = 17$.



Napokon, ako vidíme, trojuholník predstavujúci otočenú jedáleň je tvorený 3 takýmito rovnoramennými trojuholníkmi s obsahom 17. Takže obsah otočenej jedálne, a teda aj pôvodnej jedálne je $3 \cdot 17 = 51$.

Komentár

Ako vidno na vzorovom riešení, úloha sa dala vyriešiť bez akýchkoľvek vzorcov či rovníc – čo mnohí z vás krásne využili. Našlo sa však aj veľa skvelých riešení, ktoré sa k výsledku dopracovali úpravou niektorých známych vzťahov, ktoré platia v trojuholníkoch. K tomu by sme len chceli podotknúť, že nie všetky náhodné fakty, ktoré sú na internete, možno len tak bez dôkazu použiť. Pokiaľ ide o známy vzťah, je to v poriadku, ale ak si nie ste istí, je lepšie k nemu napísať aj odvodenie. Okrem toho sme sa mnohokrát stretli so zamieňaním slov *rovnoramenný* a *rovnostranný*. Všetky rovnostranné trojuholníky sú aj rovnoramenné, takže niekedy to neprekáža, ale treba si na to dávať pozor. Takáto zámena totiž často zničí celý výrok.

5 opravovali: **Dano Onduš** a **Martin „Kopy“ Kopčány**

najkrajšie riešenia: Richard Prikler, Eva Krajčiová

26 riešení

Zadanie

Pali si do zošita na nočnom stolíku po každej epizóde zapisuje, koľkokrát už Francesca podviedla Chulia. Prvé dve čísla, ktoré napísal sú 1 a 1. Každé nasledujúce číslo, ktoré si zapísal, bolo súčinom predchádzajúcich dvoch zvýšeným o 1. To znamená, že číslo, čo si napísal po tretej epizóde je $1 \cdot 1 + 1 = 2$. Ukážte, že číslo, čo si napísal po 2020-tej epizóde, nie je deliteľné číslom 4.

Riešenie

Ak sa nám podarí dokázať, že číslo napísané po 2020-tej epizóde nie je párne, tak sa nám zároveň podarí dokázať aj, že nie je deliteľné štvorkou, lebo každé číslo deliteľné štvorkou je aj párne.

Párne čísla si označme P a nepárne čísla si označme N. Na začiatku máme napísané čísla 1 a 1, čiže dve nepárne čísla. Keď medzi sebou vynásobíme dve nepárne čísla a pripočítame 1, tak dostaneme číslo párne. Môžeme to zapísať ako $N \cdot N + 1 = P$. Štvrté číslo v poradí bude nepárne, lebo druhé je nepárne, tretie je párne a $N \cdot P + 1 = N$. Obdobne vieme zistiť, že aj piate napísané číslo bude nepárne, lebo $P \cdot N + 1 = N$.

Tak ako na začiatku tu máme dve nepárne čísla za sebou, a teda môžeme povedať, že sa nám tu bude donekonečna opakovať vzor NNP. Platí to preto, lebo na paritu každého ďalšieho čísla má vplyv len parita predchádzajúcich dvoch čísel.

Z toho si vieme odvodiť, že každé tretie číslo bude párne a zvyšné čísla budú nepárne. Na to, aby bolo číslo napísané po 2020-tej epizóde párne, je nutné, aby bolo číslo 2020 deliteľné tromi. To ale nie je, a tak číslo napísané po 2020-tej epizóde je nepárne, čiže nie je ani deliteľné štyrmi.

Komentár

Veľmi nás teší, že sa skoro všetkým z vás podarilo objaviť vzor, ako sa budú opakovať párne a nepárne čísla. Nestačí ho však iba objaviť, ale je potrebné dokázať, že sa bude opakovať až po číslo napísané po 2020-tej epizóde, na čo, bohužiaľ, viacerí z vás zabudli, prípadne bol ich dôkaz neúplný.

6 opravovali: **Samo Krajči** a **Sara Gašparová**

najkrajšie riešenia: Veronika a Richard Vodičkovci

17 riešení

Zadanie

Vo finále 23tej série sa Vincenzo dozvedá, že Bianca ho podviedla a rozhodol sa zavraždiť ju, rovnako ako posla tejto správy – Chulia. Naháňajú sa teda po obvode kruhovej sály, pričom Vincenzo obehne celú sálu za 360 sekúnd. Bianca beží dvakrát rýchlejšie ako Vincenzo a Chulio beží trikrát rýchlejšie ako Vincenzo. Začínajú z rovnakého miesta a behajú, pokým sa znovu všetci traja nestretnú na tom istom mieste. Akú dlhú dobu dokopy za tento čas bol trojuholník Vincenzo-Bianca-Chulio ostrouhlý?

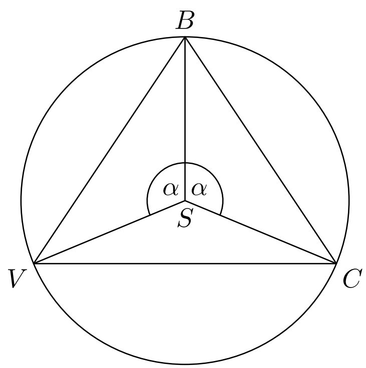
Riešenie

Najprv si všimnime, že ak otočíme celú sálu, vrátane troch bežcov, ich vzájomná poloha sa nezmení a nezmení sa ani trojuholník, ktorý tvoria.

Keď Vincenzo beží rýchlosťou jedno kolečko za 360 sekúnd, tak Bianca za rovnaký čas prebehne dve a Chulio tri. Môžeme si teda všimnúť, že Vincenzo zabehne za 360 sekúnd o kolečko menej ako Bianca, zatiaľ čo Chulio o rovnako veľa viac.

Vieme si teda úlohu trochu zjednodušiť tak, že si Biancu „zafixujeme“ na mieste (čiže stále si otočíme sálu tak, aby Bianca bola na pôvodnom mieste) a potom sa od nej Chulio bude vzďaľovať rýchlosťou jedno kolečko za 360 sekúnd a rovnako aj Vincenzo, no ten do druhého smeru.

Označme S stred sály. Potom vidíme, že uhly BSV a CSB sú vždy zhodné, a teda aj celé trouhlníky BSV a CSB. Navyše, keďže Vincnzo obehne celú sálu, teda 360°, za 360 sekúnd, oba tieto uhly budú mať po α sekundách veľkosť α (stupňov).



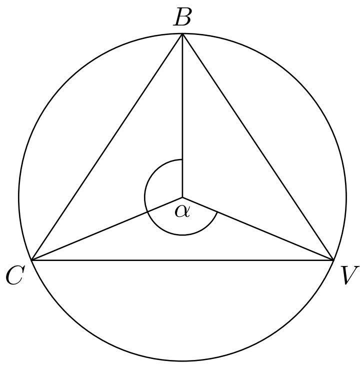
Navyše je jasné, že sa všetci stretnú prvýkrát, keď Vincenzo aj Chulio obaja obehnú sálu práve raz, teda α môže byť najviac 360°.

Vidíme, že sála je osovo súmerná podľa BS, takže trojuholník VCB je rovnoramenný (a to aj keď α je viac ako 180°). V rovnoramennom trojuholníku nemôžu byť uhly pri základni väčšie ako 90°, pretože musia mať rovnakú veľkosť, a ak by oba boli väčšie ako 90°, tak súčet uhlov v trojuholníku by bol viac ako 180°. Takže na to, aby trojuholník bol ostrouhlý, nám stačí zistiť, kedy je uhol pri B ostrý.

No všimnime si, že keď je α menej ako 180°, body sú na kružnici v poradí B, C, V (v smere hod. ručičiek), ale keď je α viac ako 180°, C a V sa vymenia a budú v poradí B, V, C.

Takže sa nevyhneme rozdeleniu polôh do dvoch prípadov, keď je α viac a keď je menej ako 180°.

- Ak $\alpha < 180^\circ$, tak body sú v takom poradí, ako na obrázku vyššie. Potom je jasné, že trojuholník VSB je rovnoramenný, a teda uhol VBS je $(180^\circ - \alpha)/2$ a rovnako aj uhol SBC, takže uhol VBC má veľkosť $180^\circ - \alpha$. Na to, aby bol ostrý, α musí byť viac ako 90° a z predpokladu zároveň menej ako 180°. Takže v tomto prípade je trojuholník ostrouhlý práve 90 sekúnd.
- Ak $\alpha > 180^\circ$, tak body budú v poradí ako na obrázku nižšie.



Potom uhol VSB je $360^\circ - \alpha$ a VBS je potom $(180^\circ - (360^\circ - \alpha))/2 = (\alpha - 180^\circ)/2$. Rovnako aj CBS, čiže uhol CBV je $\alpha - 180^\circ$. Na to, aby bol ostrý, musí byť teda α menej ako $180^\circ + 90^\circ = 270^\circ$. Takže aj v tomto prípade je trojuholník ostrouhlý práve 90 sekúnd.

Čiže dokopy dostávame 180 sekúnd, kedy je náš trojuholník ostrouhlý.

Komentár

Táto úloha je príkladom úlohy v ktorej veľmi ľahko a rýchlo intuitívne vidno riešenie, ale je ťažké nájsť dobré matematické argumenty, prečo to je naozaj tak, o čom svedčí aj to, že takmer každé riešenie malo správny výsledok, no len málo malo 9 bodov.

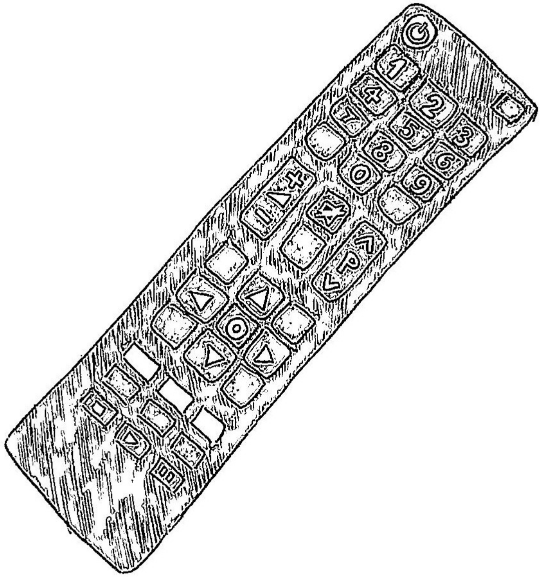
Vačšina „nedeväťbodových" riešení si správne všimla, že je rozumné rozdeliť si polohy do nejakých intervalov podľa času, no nezvládli už zdôvodniť, prečo všetky polohy tvoria alebo netvoria ostrouhlý trojuholník.

Objavilo sa aj pár riešiteľov, čo si úlohu naprogramovali. Avšak aj keď naprogramovať si peknú animáciu vám pomôže všimnúť si, ako sa body správajú a čo sa s trojuholníkom vlastne deje, program nie je žiaden dôkaz, že vaše pozorovanie je správne stále, pretože ani počítač nevie overiť úplne všetky konfigurácie, keďže ich je nekonečne veľa.

Autori vzorových riešení: Erik Berta, Viktória Brezinová, Martin Albert Gbúr, Patrik Paľovčík, Róbert Sabovčík, Žaneta Semanišinová, Timea Szöllősová

Konečné poradie letného semestra 34. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
1. - 4.	Oliver Seman	Z8	GAlejKE	54	9	9	9	9	9	-	**108**
	Richard Prikler	Z7	GJARMPO	54	9	9	9	9	9	-	**108**
	Lucia Chladná	Z9	GAMČABA	54	9	9	9	9	9	9	**108**
	Eva Krajčiová	Z8	GAlejKE	54	9	9	9	9	9	9	**108**
5. - 6.	Michal Vodička	Z7	GAlejKE	52	9	9	8	9	9	9	**106**
	Richard Vodička	Z9	GAlejKE	52	9	9	9	9	9	9	**106**
7.	Martina Osuska	Z7	ZDrJDMA	54	9	9	9	9	6	2	**105**
8.	Martin Franek	Z8	GsvFHZA	54	9	9	9	7	1	9	**104**
9. - 10.	Matúš Libák	Z9	GAlejKE	52	9	9	9	8	9	7	**103**
	Alenka Bálintová	Z7	CZRZaZA	50	8	9	9	9	9	5	**103**
11. - 12.	Veronika Vodičková	Z9	GAlejKE	49	9	9	9	8	7	9	**100**
	Tomáš Kubrický	Z9	ZKro4KE	53	9	9	9	8	9	3	**100**
13.	Ondrej Králik	Z9	GAlejKE	51	9	9	9	6	7	4	**95**
14.	Janka Urbánová	Z7	GAlejKE	45	9	9	-	9	9	3	**93**
15.	Marek Horváth	Z9	GKonšPO	49	8	9	3	9	9	4	**91**
16.	Vladimír Slanina	Z9	ZKro4KE	52	9	7	4	9	8	1	**90**
17.	Ondrej Tóth	Z7	GVaršZA	51	8	9	1	4	6	-	**88**
18.	Katarína Ostertágová	Z8	CENADA	36	9	9	4	9	9	-	**80**
19.	Katarína Farbulová	Z9	GAlejKE	45	9	9	-	9	7	-	**79**
20.	Lukáš Jacko	Z9	ZKro4KE	43	9	9	-	9	7	1	**78**
21.	Natália Tkáčová	Z8	ZLevoSN	46	9	9	4	9	-	-	**77**
22.	Maxima Bednarčíková	Z9	GAlejKE	40	9	5	-	9	4	-	**67**
23.	Hana Sabová	Z7	2. ZŠ	26	7	9	-	8	4	-	**63**
24.	Sarah Klopstock	Z7	ŠpMNDaG	32	9	9	-	2	-	-	**61**
25.	Janka Ľochová	Z7	GOpatKE	28	9	9	1	1	0	1	**58**
26.	Zuzana Beňová	Z7	ZFKráZC	27	9	-	-	9	-	-	**54**
27.	Ľubomíra Šenitková	Z9	GLipany	26	9	9	0	4	1	4	**53**
28.	Natália Poliačiková	Z9	ZKro4KE	27	9	9	-	-	4	-	**49**
29. - 30.	Paulína Tkáčová	Z9	ZLevoSN	45	-	-	-	-	-	-	**45**
	Martin Dudjak	Z9	SMládPP	30	6	9	-	-	-	-	**45**
31.	Soňa Grofčíková	Z7	ZLNovKE	43	-	-	-	-	-	-	**43**
32.	Kalista Semancová	Z9	ZSNP1HE	24	5	9	-	-	3	-	**41**
33.	Emma Stajančová	Z7	ZPečoNV	27	-	-	-	-	-	-	**27**
34.	Boris Köröš	Z7	GAlejKE	26	-	-	-	-	-	-	**26**
35.	Radovan Milián	Z8	ZKro4KE	22	-	-	-	-	-	-	**22**
36.	Lenka Prevužňáková	Z7	ZPečoNV	14	-	-	-	-	-	-	**14**
37.	Tereza Spustová	Z9	Gym. J. Tranovského	4	-	-	-	-	-	-	**4**
38.	Tatiana Mizeráková	Z7	ZPečoNV	2	-	-	-	-	-	-	**2**



Názov:	*MATIK* – korešpondenčný matematický seminár Číslo 6 • Máj 2021 • Letný semester 34. ročníka
Internet:	`matik.strom.sk`
E-mail:	`matik@strom.sk`
Riešenia:	Prijímame poštou, na webe a v prípade poruchy na `riesenia@strom.sk`
Organizátor:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Šrobárova 2, 041 54 Košice Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM
ĽUDSKÉ ZDROJE

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk