Korešpondenčný Matematický Seminár

MATIK

Číslo 3 — Ročník 33 matik.strom.sk

Čauko!

Jeseň uplynula ako voda a my sme sa konečne dočkali nielen prvého snehu, ale aj konca zimného semestra. Iste viete, čo to znamená – vzorové riešenia, komentáre, konečné poradie... A pre tých najúspešnejších aj odmena v podobe skvelého sústredenia! No teraz je načase na chvíľku vypnúť, užiť si prázdniny a obnoviť sily, pretože nové príklady na seba nenechajú dlho čakať... Príjemné sviatky vám všetkým!

Vaši vedúci MATIKa

Ako bude

Vianočný Maxiklub

Tradične v čase Vianoc sa bude konať vianočný Maxiklub, čo je vianočné stretnutie STROMákov! Vítaní sú všetci účastníci, bývalí účastníci aj každý, kto má rád STROM. Stretneme sa 21. 12. o 15:00 v miestnosti SJSP19 na PF UPJŠ na Jesennej 5 v Košiciach, ktorá nám bude k dispozícii do 18.00. Okrem seba nezabudnite doniesť aj vianočnú náladu a nejaké fajné jedlo, určite sa zíde. :)

2% z daní

Aj tento rok môžu vaši rodičia venovať 2% zo svojich daní verejnoprospešným organizáciám, ako sme my (niektorí dokonca až 3%).

Peniaze získané z 2% využívame na pokrytie časti nákladov spojených s aktivitami pre vás (tlač časopisov, poštovné, ceny na súťažiach, aktivity na sústredeniach...).

Chceme vás preto poprosiť, aby ste rodičom, členom svojej blízkej aj vzdialenej rodiny, susedom a pokojne aj cudzím ľuďom na ulici porozprávali o našich aktivitách a poprosili ich, aby svojou troškou podporili našu dobrovoľnícku činnosť a pomohli tým skupine mladých cieľavedomých ľudí zabezpečujúcich chod týchto úžasných seminárov, ktoré tak zbožňujete. Vysvetlite im, že takto podporia aj váš rozvoj a prispejú k zmysluplnému tráveniu vášho voľného času.

Potrebné informácie o tom, ako darovať 2%, nájdete na stránke nášho združenia `zdruzenie.strom.sk/sk/zdruzenie/2percenta/` a radi vám odpovieme na ľubovoľné otázky ohľadom našej podpory aj mailom na `info@strom.sk`.

Ďakujeme!

Vzorové riešenia 2. série úloh zimného semestra

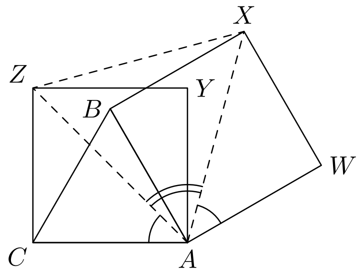
1 opravovali **Lenka Hake** a **Janči Richnavský**
najkrajšie riešenie: Alžbeta Klimentová

92 riešení

Zadanie

Na papieriku bol útvar zložený z 2 štvorcov a rovnostranného trojuholníka. Dokážte, že trojuholník AXZ je rovnostranný.

Riešenie



Všimnime si, že oba zo štvorcov $AYZC$ a $AWXB$ majú jednu zo strán spoločnú s rovnostranným trojuholníkom ABC. Keďže je to rovnostranný trojuholník, tak aj strany štvorcov sú tým pádom rovnaké, a teda ide o zhodné štvorce. Preto budú aj ich uhlopriečky AZ a AX zhodné.
Ďalej si všimnime uhol CAW. Jeho veľkosť vyrátame ako súčet uhlov CAB a BAW. Pritom veľkosť uhla CAB bude 60°, pretože ide o vnútorný uhol v rovnostrannom trojuholníku a veľkosť uhla BAW bude 90°, keďže ide o vnútorný uhol v štvorci. Dokopy má teda uhol CAW $60° + 90° = 150°$. Pozrime sa teraz na uhly CAZ a WAX. Ide o uhly zvierané uhlopriečkou a stranou štvorca. Potom budú mať oba tieto uhly veľkosť $90°/2 = 45°$, vzhľadom na to, že uhlopriečka v štvorci delí jeho vnútorný uhol napoly a vnútorný uhol v štvorci má 90°.
Keď odrátame od uhla CAW uhly CAZ a WAX, dostaneme uhol ZAX, čiže uhol zvieraný AZ a AX. Jeho veľkosť teda bude $150° - 45° - 45° = 60°$.
V trojuholníku AXZ vieme, že dve jeho strany AZ a AX sú rovnaké, teda ide o rovnoramenný trojuholník so základňou XZ. Ďalej vieme, že uhol zvieraný jeho ramenami AZ a AX má 60°. Keďže je súčet vnútorných uhlov v trojuholníku 180° a uhol ZAX má 60°, tak zvyšné dva uhly v trojuholníku AXZ budú mať spolu $180° - 60° = 120°$.
Pretože ide o rovnoramenný trojuholník a tieto dva uhly sa nachádzajú pri jeho základni, budú mať aj rovnakú veľkosť. Keď 120° vydelíme dvomi, zistíme, že zvyšné dva uhly v trojuholníku AXZ musia mať tiež $120°/2 = 60°$. Ukázali sme, že všetky uhly v trojuholníku AXZ majú 60°, a teda vieme, že trojuholník AXZ je rovnostranný, čo je to, čo sme chceli dokázať.

Komentár

Ciest k riešeniu bolo mnoho, čo dokázala aj rozmanitosť vašich riešení. My vo vzorovom riešení uvádzame pravdepodobne najjednoduchšie z nich, no ostatné sú samozrejme tiež správne, ak vás k dôkazu doviedli.

Problém však nastal pri niektorých riešeniach v tom, že riešiteľovi stačilo na prehlásenie rovnostrannosti trojuholníka len to, že má dve strany rovnaké a uhol medzi nimi je 60°. To však priamo nedokazuje to, že je rovnostranný. Je veľmi dôležité dotiahnuť dôkaz do konca a uvedomiť si, kedy sme k nemu naozaj už prišli. Za túto chybu sme však sťahovali len minimálny počet bodov.
Ešte jemne obsiahlou kategóriou boli riešitelia, ktorí sa rozhodli dôkazovú úlohu riešiť rysovaním, čo nikdy nie je správne. Rysovanie prináša nepresnosť a obmedzenie na jeden konkrétny príklad. Ak chceme niečo dokázať všeobecne, musíme ukázať, že to tak bude platiť vždy, pre všetky prípady či dĺžky úsečiek. Takéto riešenia sme, žiaľ, nemohli ohodnotiť vysokým bodovým ziskom.

2

opravovali **Daniel Onduš** a **Erik Novák**
najkrajšie riešenia: Eva Krajčiová a Vladimír Slanina

77 riešení

Zadanie

Piati medojedi: Ahmed, Bartolomed, Ctimed, Demeder a Elizamed sa hádali o počte džbánov medu, ktoré im ostali v zásobe z pôvodných 100. Každý medojed buď vždy klame alebo vždy hovorí pravdu. Toto sú výroky jednotlivých medojedov:

- Ahmed: Počet džbánov medu dáva zvyšok 1 po delení 4. Hovorím pravdu.
- Bartolomed: Počet džbánov medu je deliteľný 7 a Demeder je klamár.
- Ctimed: Počet džbánov medu je deliteľný 13, Demeder a Elizamed nie sú rovnakí.
- Demeder: Počet džbánov medu je deliteľný 3 a Ahmed je klamár.
- Elizamed: Máme viac ako 40 džbánov medu, Bartolomed a Demeder sú rovnakí.

Koľko džbánov medu majú medojedi v zásobe? Nájdite všetky možnosti.

Riešenie

Poďme najprv zistiť, aké sú možnosti, kto kedy hovorí pravdu a kto klame.
Povedzme, že by bol Ahmed pravdovravec. Demeder vraví, že Ahmed je klamár, čo nie je pravda, teda Demeder je klamár. Bartolomed vraví o Demederovi, že je klamár, čo je pravda, čiže Bartolomed vraví pravdu. Bartolomed je pravdovravec a Demeder klamár. Keďže nie sú rovnakí, je Elizamed, tvrdiaca, že sú rovnakí, klamárka. Demeder a Elizamed sú obaja klamári, čiže Ctimed tvrdiaci, že nie sú rovnakí, je klamár. Ak je teda Ahmed pravdovravec, tak je aj Bartolomed pravdovravec a zvyšní sú klamári.
Teraz povedzme, že by Ahmed bol klamár. Demeder vraví, že Ahmed je klamár, čo je pravda, teda Demeder je pravdovravec. Bartolomed vraví o Demederovi, že je klamár, čo nie je pravda, a preto je Bartolomed klamár. Bartolomed je klamár a Demeder pravdovravec, teda znova nie sú rovnakí a Elizamed je klamárka. Demeder je pravdovravec a Elizamed klamárka, čiže Ctimed, tvrdiaci že nie sú rovnakí, je pravdovravec.

Od momentu, kedy sme si zvolili, či je Ahmed pravdovravec alebo klamár, sme nemali ani raz na výber, takže sme našli všetky možnosti. V jednej vravia pravdu Ahmed a Bartolomed a v druhej Ctimed a Demeder.
Poďme teraz zistiť, koľko majú džbánov v zásobe. V prvej možnosti pravdu vravia Ahmed a Bartolomed a zvyšok klame. Počet džbánov v tejto možnosti je číslo, ktoré dáva zvyšok 1 po delení 4, je deliteľné 7, nie je deliteľné 13 ani 3 a nie je väčšie ako 40. Pozrime sa na násobky čísla 7 nepresahujúce 40. Sú to čísla 7, 14, 21, 28, 35. Z týchto čísel jediné so zvyškom 1 po delení 4 je číslo 21. 21 je však deliteľné 3, čo počet džbánov byť nemôže. To znamená, že v prvej možnosti nie sú žiadne možné počty džbánov.
V druhej možnosti pravdu vravia Ctimed a Demeder a zvyšok klame. Počet džbánov v tejto možnosti je číslo, ktoré nedáva zvyšok 1 po delení 4, nie je deliteľné 7, je deliteľné 13 aj 3 a nie je väčšie ako 40. Pozrime sa na násobky čísla 13 nepresahujúce 40. Sú to čísla 13, 26, 39. Z týchto čísel jediné deliteľné 3, je číslo 39. 39 nie je deliteľné 7 a po delení 4 dáva zvyšok 3, teda spĺňa všetky podmienky.
Jediný možný počet džbánov medu, ktorý medojedi môžu mať v zásobe je 39.

Komentár

Väčšine z vás sa úlohu podarilo vyriešiť správne podobným spôsobom, aký sme popísali vyššie. Najčastejšou chybou okrem drobných nepozorností bolo, že ste zabudli zohľadniť, že ak niekto klame, tak klame aj o počte džbánov, a tak ste napríklad nevylúčili možnosť 21 džbánov, ktorá bola deliteľná troma, aj keď nesmela byť.
Zároveň sa ospravedlňujeme za mierny chaos pri otázkach o presnej formulácii zadania. Presnejšie by bolo napísať, že každý medojed povedal dva výroky, jeden o pravdivosti a druhý o počte džbánov, a buď by obidva tieto výroky museli byť pravdivé, alebo obidva nepravdivé. Dúfame, že to nikoho z vás príliš nezmiatlo.

3 opravovali **Lujza Milotová** a **Mimi Hanus**

najkrajšie riešenia: Barbora Baltovičová a Matej Válek

68 riešení

Zadanie

Zajda a Klára hrajú hru. Najprv Zajda položí na stôl čiernu alebo bielu figúrku. Potom Klára položí čiernu alebo bielu figúrku za tú, ktorá bola na stôl položená naposledy. Takto sa striedajú v pokladaní figúriek na stôl, pričom v rade nemôžu byť 3 rovnaké figúrky za sebou. Vyhrá tá, ktorá položí do radu deviatu bielu figúrku. Nájdite víťaznú stratégiu pre jednu z nich.

Riešenie

Víťaznú stratégiu má druhá hráčka – Klára.
Klára vo svojom ťahu vždy položí figúrku rovnakej farby, ako položila Zajda pred ňou. Tým Zajde nedá na výber a Zajda vo svojom ďalšom ťahu bude musieť položiť

figúrku inej farby, lebo tri figúrky rovnakej farby za sebou ísť nemôžu. Takto bude Klára postupovať, až kým nepoloží ôsmu bielu figúrku. Potom Zajda musí položiť čiernu a po nej Klára položí bielu (deviatu) figúrku. Bez ohľadu na to, akou figúrkou začína, Klára takto vie postupovať.
Ukážeme si to na oboch prípadoch:

●	●	①	②	●	●	③	④	●	●	⑤	⑥	●	●	⑦	⑧	●	⑨
Z	K	Z	K	Z	K	Z	K	Z	K	Z	K	Z	K	Z	K	Z	K
①	②	●	●	③	④	●	●	⑤	⑥	●	●	⑦	⑧	●	⑨		

Komentár

Väčšine odovzdaných riešení sa podarilo úspešne vyriešiť úlohu.
Vysvitlo, že takmer všetci, ktorí porozumeli zadaniu a hrali hru, ktorá v ňom bola popísaná, ju vyriešili a našli Kláre vyhrávajúcu stratégiu. Na druhej strane sa našlo nemálo takých, ktorým sa nepodarilo hrať, čo sme chceli a namiesto toho hrali inú hru. Napríklad hrali hru, v ktorej vyhrá tá, ktorá položí ako deviatu figúrku zo všetkých figúrok bielu (tu je problém, že Klára nemôže vyhrať, pretože deviatu figúrku vždy položí Zajda, čiže buď vyhrá Zajda, alebo hra nebude mať víťaza). Iní sa zas snažili položiť ako prví deviatu bielu figúrku spomedzi svojich, čoho riešením bola neveľmi zaujímavá snaha klásť biele figúrky, keď to len šlo (vďaka čomu vyhrala Zajda jednoducho preto, lebo sa s ňou Klára prinajlepšom po jednej bielej striedala). Ukázalo sa teda, že je dôležité nielen správne využitie intuície, ale aj pozorné čítanie zadania. Tiež sa vypláca zvážiť, či úloha, ktorú riešime, je zmysluplná, či by nám mohla byť zadaná (občas sa vyskytnú čudné úlohy, ale predsa :)), a napokon pred spisovaním riešenia si ešte raz prečítať zadanie, či si ho dobre pamätáme (a ak sa zvýši čas, ešte snáď naposledy pri odovzdávaní).

4

opravovali **Robo Sabovčík** a **Paťo Paľovčík** — 65 riešení
najkrajšie riešenie: Lucia Chladná

Zadanie

Plánik hry, ktorú Zajda a Klára hrali bol pravidelný 9-uholník. Klára nakreslí na plánik takú priamku, ktorá neprechádza vrcholom plánika. Následne Zajda dokreslí do plánika všetky uhlopriečky, ktoré Klárinu priamku pretínajú. Ukážte, že počet uhlopriečok pretínajúcich Klárinu priamku je párny, bez ohľadu na to, ako ju Klára nakreslí. Čo ak by plánik bol pravidelný 2019-uholník?

Riešenie

Priamka neprechádza vrcholom plánika, čiže rozdelí 9-uholník na 2 časti a v každej z nich bude nejaký počet vrcholov. 9 je nepárne číslo, čiže ho vieme rozdeliť na 2 časti len tak, že v jednej časti 9-uholníka bude párny počet vrcholov a v druhej časti bude nepárny počet vrcholov.

Pozrime sa na to, koľko uhlopriečok bude pretínať Klárinu priamku. Pretínať ju budú všetky také uhlopriečky, že jeden ich vrchol je na jednej strane od priamky a druhý na druhej strane. Z každého vrcholu na jednej strane od priamky vedieme uhlopriečku do každého vrcholu na druhej strane od priamky a počet uhlopriečok bude súčin počtu týchto vrcholov na oboch stranách. Vieme, že na jednej strane od priamky je párny počet vrcholov a na druhej strane nepárny, čiže súčin bude párne číslo. Toto číslo však nie je skutočný počet uhlopriečok pretínajúcich danú priamku. Musíme si uvedomiť, že spojnice medzi vrcholmi na krajoch dvoch častí v skutočnosti nie sú priamky, ale strany 9-uholníka. Tieto strany sú dve, čiže od zisteného počtu uhlopriečok musíme odpočítať 2, čo je však tiež párne číslo a rozdiel dvoch párnych čísel je párny. Dokázali sme si teda, že v 9-uholníku bude počet priamok pretínajúcich priamku vždy párny.
Teraz sa pozrime na 2019-uholník. Zaujíma nás len to, že počet jeho vrcholov je nepárny. Opäť teda na jednej strane od priamky bude párny počet vrcholov a na druhej nepárny. Počet uhlopriečok vieme vypočítať rovnako ako minule, čiže ako súčin počtov vrcholov na oboch stranách zmenšený o 2, čo bude z rovnakého dôvodu ako pri 9-uholníku vždy párne číslo.

Komentár

Väčšina z vás sa s úlohou veľmi dobre popasovala a snažila sa ju riešiť nielen skúšaním, ale aj zovšeobecnením nejakej myšlienky. To sa potom ukázalo aj na tom, že mnohým z vás sa úlohu podarilo vyriešiť aj v prípade 2019-uholníka, čo by bez všeobecného riešenia nebolo možné. Do budúcnosti si však dajte pozor na to, aby ste vaše kroky pozorne vysvetľovali, lebo mnohokrát sa stalo, že vaše riešenie obsahovalo síce správne myšlienky, no nebolo vysvetlené, prečo sú správne, alebo, ako nám pomôžu pri riešení. Jednou konkrétnou opakujúcou sa chybou, na ktorú by sme radi upozornili je, že mnoho z vás zabudlo od súčinu bodov na dvoch stranách priamky odpočítať 2, teda počet takýchto spojení, ktoré sú stranami, nie uhlopriečkami. Je to síce len malá chyba, no viete sa jej pozorným čítaním veľmi ľahko vyhnúť. Celkovo sme však s vašimi riešeniami veľmi spokojní. :)

5 opravovali **Timka Szöllősová** a **Gabča Genčiová**

najkrajšie riešenia: Richard Vodička a Milan Jozef Pokorný

68 riešení

Zadanie

Majme číslo n, ktoré má všetky cifry rôzne a zároveň zoradené od najmenšej po najväčšiu. Zistite aký ciferný súčet môže mať číslo $9n$. Nájdite všetky možnosti.

Riešenie

Ako prvé si všimnime jednu zaujímavú vec, a to, že číslo $9n$ sa dá zapísať ako rozdiel čísel $10n$ a n. To je zaujímavé, pretože obe tieto čísla majú rovnaké cifry.

Ďalšia vec, ktorú si na tomto rozklade môžeme všimnúť, je, že keď odčítame tieto čísla pod sebou, tak okrem posledného miesta nám nikde nenastane prechod cez desiatku. Je to tak preto, lebo cifry v čísle sú zoradené od najmenšej po najväčšiu, teda vždy odčítavame menšiu cifru od väčšej. Naopak, na poslednom mieste – na mieste jednotiek – odčítavame od nuly, a teda tu určite bude prechod cez desiatku. Pozrime sa teda, aké cifry bude mať číslo $9n$. Predtým si však označme cifry čísla n ako a_1, a_2 až a_k. Posledné cifra bude teda $10 - a_k$. Kvôli prechodu cez desiatku bude predposledná cifra $a_k - a_{k-1} - 1$. Tretie od konca bude $a_{k-1} - a_{k-2}$ a tak ďalej.

$$S_{9n} = (10 - a_k) + (a_k - a_{k-1} - 1) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1$$

Keď si to zapíšeme do rovnice, tak si môžeme všimnúť, že keď sčítame všetky cifry čísla $9n$, tak vlastne každú z pôvodných cifier raz pričítame a raz odčítame. Okrem toho nám tam ešte ostane desiatka a mínus jednotka. Z toho vyplýva, že nech cifry na začiatku zvolíme akékoľvek, ciferný súčet bude vždy 9. Ešte sa môžeme zamyslieť nad tým, že rovnako to bude platiť aj pre desatinné a záporné čísla, keďže tie sa pri násobení správajú rovnako. Jedinú výnimku tvorí nula, pretože tú nech násobíme hocičím, vždy ostane nulou.

Komentár

Takmer všetkým sa vám podarilo dopracovať k výsledku 9, ale mnoho z vás zabudlo na to, že môže nastať aj prípad, keď n bude nula. Z toho dôvodu sme sa rozhodli nestrhávať za to body a zároveň chceme pochváliť každého, kto si túto možnosť uvedomil. Najčastejšou príčinou straty bodov bolo to, že ste sa rozhodli úlohu riešiť vypisovaním možností a v zadaní ste uviedli len niekoľko konkrétnych možností. Ak sa hocijakú úlohu rozhodnete riešiť vypisovaním možností, je potrebné ich uviesť všetky, aby ste dokázali, že to platí pre každé jedno číslo. Taktiež je potrebné, aby ste sa zamerali na to, na čo sa pýta zadanie. Medzi riešeniami bolo viacero takých, ktoré argumentovali tým, že to je 9 práve kvôli tomu, že ak budeme stále dookola robiť ciferný súčet ciferného súčtu, nakoniec to musí byť 9, práve pre pravidlo deliteľnosti číslom 9. To je síce pravda, ale nie to, na čo sa pýta zadanie. Na záver však chceme ešte pochváliť všetkých, ktorí prišli s peknými, zaujímavými a originálnymi myšlienkami vo svojich riešeniach. :)

6 opravovali **Maťo Gbúr** a **Mišo Masrna**

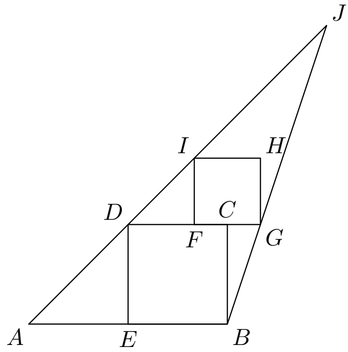
najkrajšie riešenie: Katarína Farbulová

54 riešení

Zadanie

Podľa zasadacieho poriadku sú v sále trojuholníkového tvaru umiestnené dva štvorcové stoly ako na obrázku. Platí, že E je stredom AB a zároveň C je stredom FG. Koľkokrát je obsah trojuholníkovej sály ABJ väčší ako obsah štvorcového stola $BCDE$?

Riešenie



Najprv si označme stranu štvorca $BCDE$ a a stranu štvorca $FGHI$ b. Keďže E je stredom AB a $|EB| = a$, tak $|EB| = |AE| = a$. Ak sa pozrieme na trojuholník AED, zistíme, že je rovnoramenný so základňou AD, lebo obe jeho ramená majú dĺžku a. Uhol AED je pravý a uhly pri základni rovnoramenného trojuholníka sú rovnaké.

$$|\angle DAE| = |\angle ADE| = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$$

Priamka DG je rovnobežná s priamkou AB, čo znamená, že uhly DAE a IDF sú súhlasné a majú rovnakú veľkosť. Uhly DFI a AED sú oba pravé, takže sú tiež rovnaké. Z toho vyplýva, že trojuholníky AED a DFI sú podobné podľa vety uu, čiže aj trojuholník DFI je rovnoramenný so základňou DI. A ak $|FI| = b$, tak aj $|DF| = b$.

Keďže C je stredom FG a $|FG| = b$, tak $|FC| = |CG| = b/2$. Pozrime sa teraz na úsečku DC. Pre ňu zjavne platí, že $|DC| = |DF| + |FC|$. Ak si za dĺžku DC dosadíme a a dĺžky DF a FC vyjadríme pomocou b, dostaneme, že

$$a = b + \frac{1}{2}b = \frac{3}{2}b.$$

Vyjadríme si dĺžku AB a taktiež dĺžku DG.

$$|AB| = |AE| + |EB| = a + a = 2a = 2 \cdot \frac{3}{2}b = 3b$$
$$|DG| = |DF| + |FG| = 2b$$

Zistili sme, že pomer dĺžok AB a DG je $3 : 2$.

Všimnime si teraz, že trojuholníky ABJ a DGJ si sú podobné, a to podľa vety uu, lebo uhol ABJ je s uhlom DGJ súhlasný a rovnako aj uhly JAB a JDG sú súhlasné. Nakoľko pomer AB a DG je $3 : 2$, aj trojuholníky ABJ a DGJ si budú podobné v rovnakom pomere. To znamená, že aj výšky týchto trojuholníkov, teda výška na stranu AB (odteraz v_{AB}) a výška na stranu DG (v_{DG}) sú v pomere $3 : 2$.

Uvedomme si, že rozdiel $v_{AB} - v_{DG}$ je strana štvorca $BCDE$, teda a. Z pomeru výšok si vieme vyjadriť výšku na DG a pomocou tej výšku na AB.

$$\frac{v_{AB}}{v_{DG}} = \frac{3}{2}$$
$$2v_{AB} = 3v_{DG}$$

$$v_{DG} = \frac{2}{3} v_{AB}$$

Rozdiel $v_{AB} - 2v_{AB}/3$ je $v_{AB}/3$, čo sa má rovnať a. Po úprave dostaneme $v_{AB} = 3a$. Ak v trojuholníku ABJ poznáme dĺžku strany AB aj dĺžku výšky na túto stranu, obsah trojuholníka už vypočítame jednoducho.

$$S_{ABJ} = \frac{|AB| \cdot v_{AB}}{2} = \frac{2a \cdot 3a}{2} = 3a^2$$

Keďže obsah štvorca $BCDE$ je a^2, tak obsah trojuholníkovej sály ABJ je trikrát väčší ako obsah štvorcového stola $BCDE$.

Komentár

Pre tých z vás, ktorí si všimli podobnosť jednotlivých trojuholníkov, nebola táto úloha žiadnym problémom a skoro všetci ste sa už dopracovali k deväťbodovému riešeniu. Pár bodov ste mohli stratiť v prípade, že ste nedostatočne ukázali, že dané trojuholníky sú naozaj podobné.

Čo nás teší ešte viac, niekoľko riešiteľov sa k správnemu riešeniu dopracovalo aj iným, originálnym spôsobom, podľa ktorého by sme mohli do trojuholníka ABJ vkladať ďalšie, menšie stoly smerom k bodu J, ktorých strana by sa stále rovnala dvom tretinám strany predošlého. Výšku na stranu AB vyjadrenú v dĺžkach strany štvorca $BCDE$ by sme potom zrátali ako súčet členov geometrickej postupnosti s $q = 2/3$:

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \cdots = 3.$$

Medzi závažnejšie chyby, kvôli ktorým sme vaše riešenia už nemohli obdarovať mnohými bodmi, patrilo napríklad to, že ste sa situáciu snažili narysovať a potom zmerať výšku na stranu AB. To ale nie je poriadny dôkaz, lebo ste platnosť tvrdenia ukázali len pre nejaké vami zvolené konkrétne dĺžky a nie všeobecne, navyše, rysovanie nemusí byť presné.

Niekoľko riešiteľov riešilo úlohu zasa tým spôsobom, že ste si umiestnili útvar do štvorcovej siete. No pri takomto riešení väčšina z vás zabudla dokázať, prečo dané body naozaj ležia na súradniciach, na ktoré ste ich umiestnili.

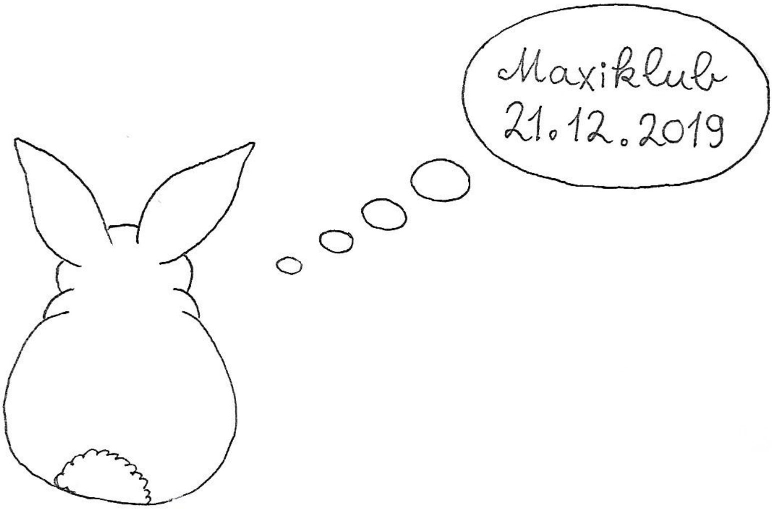
Autori vzorových riešení: Jakub Genči, Žaneta Semanišinová, Florián Hatala, Peter Kovács, Martin Masrna, Kristína Mišlanová, Daniel Onduš, Zuzana Ontkovičová, Roman Staňo

Konečné poradie zimného semestra 33. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
1. - 2.	Katarína Farbulová	Z8	GAlejKE	54	9	8	9	9	9	9	**108**
	Lucia Chladná	Z8	GAMČABA	54	9	9	9	9	9	9	**108**
3.	Milan Jozef Pokorný	Z7	GJHNHTT	54	9	9	9	8	9	-	**107**
4.	Eva Krajčiová	Z7	GAlejKE	54	8	9	9	8	0	9	**106**
5.	Richard Vodička	Z8	GAlejKE	51	9	9	9	9	9	9	**105**
6.	Natália Poliačiková	Z8	ZKro4KE	52	9	9	9	9	7	2	**102**
7.	Tomáš Kubrický	Z8	ZKro4KE	52	9	9	9	2	6	9	**100**
8. - 10.	Barbora Baltovičová	Z9	GAlejKE	46	9	9	9	8	9	9	**99**
	Branislav Ječim	Z9	ZOKožSN	48	9	9	9	9	6	9	**99**
	Michal Iľkovič	Z8	GBBGPO	52	9	9	-	9	6	8	**99**
11. - 12.	Natália Tkáčová	Z7	ZLevoSN	44	9	9	9	6	9	9	**98**
	Veronika Vodičková	Z8	GAlejKE	47	8	9	9	8	9	-	**98**
13.	Samuel Osuský	Z9	ZDrJDMA	41	9	9	9	9	9	9	**95**
14. - 16.	Terézia Stanová	Z9	EGJAKKE	46	9	9	9	9	6	6	**94**
	Ján Mlynár	Z8	SMládPP	42	8	9	9	9	9	4	**94**
	Ondrej Králik	Z8	GAlejKE	40	9	9	9	9	9	9	**94**
17.	Marek Horváth	Z8	GKonšPO	45	7	5	9	8	9	8	**93**
18. - 19.	Vlastimil Urda	Z8	ZBPPGPO	52	9	9	3	9	-	7	**92**
	Paulína Tkáčová	Z8	ZLevoSN	40	9	9	9	6	9	8	**92**
20.	Eduard Fedorčuk	Z9	EGJAKKE	37	9	9	9	9	9	9	**91**
21. - 23.	Ivana Varsányiová	Z9	GBilíBA	41	9	8	9	9	5	9	**90**
	Alžbeta Klimentová	Z9	ZLNovKE	41	9	5	9	9	9	8	**90**
	Matej Válek	Z7	ZKro4KE	40	9	8	9	8	1	7	**90**
24.	Jakub Blišťan	Z9	GAlejKE	45	7	9	9	9	1	9	**89**
25.	Lukáš Jacko	Z8	ZKro4KE	41	8	6	9	2	9	9	**88**
26.	Vladimír Slanina	Z8	ZKro4KE	31	9	9	9	-	9	9	**85**
27. - 29.	Šimon Stano	Z7	EGJAKKE	43	8	6	9	9	-	-	**84**
	Dávid Kepič	Z9	GAlejKE	45	9	9	6	3	3	9	**84**
	Matej Kundrík	Z9	ZKro4KE	48	9	9	9	9	-	-	**84**
30. - 31.	Martin Šmilňák	Z9	GAlejKE	46	9	9	9	9	1	-	**83**
	Ľudmila Krupová	Z7	ZKro4KE	42	9	9	9	-	-	5	**83**
32.	Tomáš Gaja	Z9	ZKro4KE	35	9	9	9	6	5	9	**82**
33. - 34.	Adela Horváthová	Z9	ZDnepKE	45	9	5	9	3	1	9	**81**
	Matej Šoltés	Z9	GTrebKE	30	9	9	9	9	9	6	**81**
35. - 36.	Radovan Milián	Z7	ZKro4KE	40	8	5	0	9	-	5	**76**
	Artur Pankuch	Z7	GAlejKE	40	7	2	9	4	1	5	**76**
37.	Jakub Čaník	Z7	GAlejKE	34	6	8	9	6	1	2	**74**
38. - 39.	Martin Dudjak	Z8	SMládPP	41	9	6	9	2	4	1	**73**
	Oskar Cacara	Z7	ZKro4KE	36	9	9	-	9	1	-	**73**
40.	Ivan Mikluš	Z7	ZStanKE	37	8	5	9	2	1	2	**72**
41.	Maxima Bednárčíková	Z8	GAlejKE	42	2	9	9	9	-	-	**71**
42.	Erik Jochman	Z9	GAlejKE	33	9	6	9	8	2	2	**69**
43.	Pavol, Alexander Komloš	Z9	ZKro4KE	34	8	5	-	8	3	9	**67**
44.	Tomáš Neupauer	Z7	ZVažePO	40	8	5	0	1	1	3	**66**
45.	Eduard Lehocký	Z8	ZKro4KE	37	8	-	6	7	1	5	**65**
46.	Matúš Zoričák	Z7	SMládPP	38	9	-	-	6	1	-	**63**
47. - 48.	Martina Ľuptáková	Z7	ZMRŠHLC	35	9	4	-	3	1	-	**61**

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
	Katarína Chabová	Z7	ZLNovKE	25	9	9	-	9	-	0	**61**
49. - 50.	Ján Brajerčík	Z9	ZŠmerPO	28	6	5	9	9	1	2	**60**
	Matúš Libák	Z8	GAlejKE	44	7	9	-	-	-	-	**60**
51. - 52.	Boris Pasterňak	Z9	ZKro4KE	24	7	9	-	9	1	9	**59**
	Tereza Spustová	Z8	ZK2Svit	24	8	5	9	4	-	5	**59**
53. - 54.	Zina Babinská	Z7	ZMRŠHLC	30	8	4	0	2	1	5	**58**
	Lukáš Hanes	Z7	ZKro4KE	36	3	9	-	-	1	0	**58**
55. - 56.	Bianka Gurská	Z9	GAlejKE	30	9	5	9	3	1	-	**57**
	Nina Pacholská	Z8	ZKro4KE	34	9	5	0	-	-	9	**57**
57. - 58.	Ester Szabariová	Z7	GAlejKE	25	8	5	9	-	-	-	**56**
	Viliam Karol Kubičár	Z8	ZOKožSN	33	9	9	-	-	1	4	**56**
59.	Šimon Stripaj	Z7	ZKro4KE	28	-	5	9	4	0	-	**55**
60.	Alexandra Michalíková	Z7	ZKro4KE	34	8	4	0	-	0	-	**54**
61. - 63.	Alžbeta Kurimská	Z7	ZGoraPO	24	6	6	6	1	1	4	**53**
	Bogdana Studenková	Z7	ZKro4KE	25	5	4	9	-	1	-	**53**
	Richelle Andrássyová	Z7	ZKro4KE	35	9	-	-	-	-	-	**53**
64. - 65.	Peter Varga	Z8	ZKro4KE	33	1	3	0	8	1	1	**48**
	Dušan Ivan	Z7	ZKro4KE	32	8	-	-	-	-	-	**48**
66.	Matúš Chovančák	Z8	ZKro4KE	30	8	6	-	-	1	2	**47**
67.	Ema Lola Škombárová	Z8	ZKro4KE	28	9	8	-	-	1	-	**46**
68. - 70.	Aneta Štefančínová	Z7	GJARPO	27	9	0	0	0	0	0	**45**
	Henrietta Antožy	Z8	ZKro4KE	29	8	7	0	-	1	-	**45**
	Adam Lašan	Z8	ZK2Svit	0	8	5	9	9	9	3	**45**
71. - 73.	Kalista Semancová	Z8	ZSNP1HE	26	6	9	0	2	1	0	**44**
	Lea Gašparová	Z7	GABerSC	44	-	-	-	-	-	-	**44**
	Alex Fabrici	Z8	ZPAngKE	44	-	-	-	-	-	-	**44**
74.	Dávid Györi	Z7	ZKro4KE	24	6	-	-	-	-	-	**36**
75.	Lev Melnychuk	Z7	ZPAngKE	16	9	-	-	-	-	-	**34**
76. - 77.	Patrik Barnišin	Z8	ZBPPGPO	33	-	-	-	-	-	-	**33**
	Nina Anna Betáková	Z7	ZJŠveHE	33	-	-	-	-	-	-	**33**
78.	Katarína Adamčová	Z7	ZPapiBJ	21	5	-	-	-	1	-	**32**
79.	Richard Čuba	Z8	GAlejKE	6	-	9	9	7	-	-	**31**
80.	Šimon Kirňák	Z9	ZOKožSN	24	6	-	-	-	-	-	**30**
81. - 83.	Tereza Kostiviarová	Z9	ZTSNPBB	16	3	5	-	-	1	2	**27**
	Matej Vojtaník	Z7	ZKro4KE	27	-	-	-	-	-	-	**27**
	Jozef Domonkoš	Z7	ZStanKE	6	-	3	9	-	-	-	**27**
84. - 85.	Adam Ilčík	Z7	ZKro4KE	10	8	-	-	0	0	-	**26**
	Filip Olej	Z8	ZKro4KE	18	8	-	-	-	-	-	**26**
86.	Sabína Perignatová	Z7	ZGrunKK	18	3	-	-	-	-	-	**24**
87. - 88.	Yelyzaveta Pintiiska	Z8	ZTSNPBB	9	5	-	-	-	9	-	**23**
	Vladimír Sklenár	Z9	GTVanSL	12	-	2	8	-	1	-	**23**
89.	Šimon Borovský	Z8	ZCádrBA	19	-	-	-	-	-	-	**19**
90.	Martin Kozár	Z8	GAlejKE	18	-	-	-	-	-	-	**18**
91.	Tereza Pažinová	Z9	ZKro4KE	17	-	-	-	-	-	-	**17**
92. - 95.	Alica Juhásová	Z7	ZKro4KE	16	-	-	0	-	-	-	**16**
	Ema Čumpelíková	Z8	ZVajaLC	16	-	-	-	-	-	-	**16**
	Roland Kaprál	Z7	ZGrunKK	16	-	-	-	-	-	-	**16**
	Lenka Nováková	Z7	ZOKožSN	16	-	-	-	-	-	-	**16**
96.	Nika Pastoráková	Z8	ZVajaLC	15	-	-	-	-	-	-	**15**

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
97. - 100.	Marek Nagy	Z7	ZMRŠHLC	12	-	-	-	-	1	-	**14**
	Šimon Pribičko	Z7	ZKro4KE	8	-	3	0	-	-	-	**14**
	Tomáš Sukeľ	Z7	ZJŠveHE	14	-	-	-	-	-	-	**14**
	Kevin Pauličko	Z7	ZSpByst	14	-	-	-	-	-	-	**14**
101.	Jakub Imrich	Z9	ZKro4KE	13	-	-	-	-	-	-	**13**
102. - 103.	Bruno Boczek	Z8	GAlejKE	2	7	3	0	-	-	-	**12**
	Filip Sabovčík	Z8	ZOKožSN	9	3	-	-	0	-	-	**12**
104.	Rastislav Mašlonka	Z8	ZGrunKK	9	2	-	-	-	-	-	**11**
105. - 110.	Teodor Albert	Z8	ZGHaiLE	10	-	-	-	-	-	-	**10**
	Lucia Poradová	Z8	ZK2Svit	10	-	-	-	-	-	-	**10**
	Ján Vavrek	Z8	ZGHaiLE	8	1	-	-	-	1	-	**10**
	Adam Mižík	Z8	EGJAKKE	10	-	-	-	-	-	-	**10**
	Michal Kaško	Z8	ZKro4KE	1	8	-	0	0	1	-	**10**
	Martin Šedovič	Z8	ZKro4KE	10	-	-	-	-	-	-	**10**
111. - 113.	Tomáš Štefaňák	Z8	ZGrunKK	9	-	-	-	-	-	-	**9**
	Zuzana Benešová	Z8	ZKro4KE	7	1	1	0	-	-	-	**9**
	Lenka Palušáková	Z8	ZOKožSN	9	-	-	-	-	-	-	**9**
114. - 117.	Daniel Miščík	Z8	ZKro4KE	4	4	-	-	-	-	-	**8**
	Filip Fetyko	Z8	ZKro4KE	3	2	2	0	0	1	0	**8**
	Tomáš Daňo	Z7	ZDruzKE	4	2	-	0	-	-	-	**8**
	Lukáš Olexa	Z7	ZKomeMI	8	-	-	-	-	-	-	**8**
118. - 120.	Anna Mária Matyaseková	Z8	ZKro4KE	2	-	5	-	-	-	-	**7**
	Martin Kuchta	Z8	GAlejKE	7	-	-	-	-	-	-	**7**
	Dávid Javorský	Z7	ZSpByst	7	-	-	-	-	-	-	**7**
121. - 124.	Tomáš Rybár	Z7	ZMRŠHLC	6	-	-	-	-	-	-	**6**
	Jakub Babík	Z8	ZKro4KE	6	-	-	-	-	-	-	**6**
	Miriama Kmecová	Z8	ZKro4KE	6	-	-	-	-	-	-	**6**
	Jakub Faizi	Z7	ZMRŠHLC	0	-	-	-	3	-	-	**6**
125.	Anna Chalupeková	Z7	ZTSNPBB	5	-	-	-	-	-	-	**5**
126. - 131.	Tomáš Jakubec	Z8	ZOKožSN	1	3	-	-	0	-	-	**4**
	Hana Volšíková	Z7	ZKro4KE	4	-	0	-	-	-	-	**4**
	Ján Stupák	Z7	GAlejKE	4	-	-	-	-	-	-	**4**
	Noel Molitor	Z7	ZSpByst	4	-	-	-	-	-	-	**4**
	Benedikt Benko	Z7	ZSpByst	4	-	-	-	-	-	-	**4**
	Tomáš Vysoký	Z9	ZKro4KE	4	-	-	-	-	-	-	**4**
132.	Bruno Osrman	Z8	ZSlovPB	3	-	-	-	-	-	-	**3**
133. - 134.	Tomáš Vitko	Z8	ZOKožSN	1	1	-	-	0	-	-	**2**
	Samuel Maco	Z7	ZKro4KE	0	1	-	0	-	-	-	**2**
135.	Maximiliána Ferencová	Z8	ZOKožSN	0	1	-	-	-	0	-	**1**
136. - 137.	Oskar Vizi	Z7	ZKro4KE	0	-	-	-	-	-	-	**0**
	Yarden Cohen	Z8	ZKro4KE	0	-	-	-	-	-	-	**0**



Názov: *MATIK* – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 3 • December 2019 • Zimný semester 33. ročníka
Internet: `matik.strom.sk`
E-mail: `matik@strom.sk`

Organizátor: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach,
Prírodovedecká fakulta, Šrobárova 2, 041 54 Košice
Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja
OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk