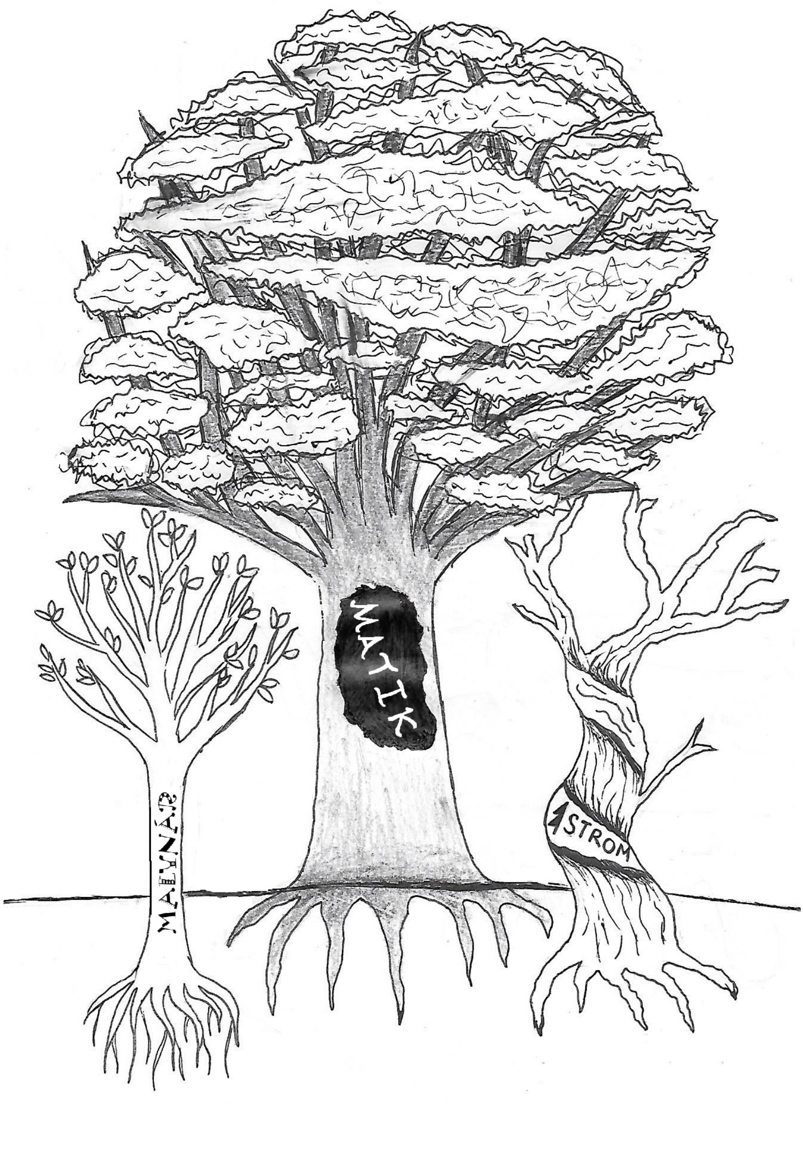
Korešpondenčný Matematický Seminár

MATIK

Číslo 2 – Ročník 32 matik.strom.sk



Ahojte!

Snáď vás neprekvapí úvodu poetická formulácia,
nejak sa k vám však musí dostať o novinkách informácia.
V škole sa vám začala edukácia,
hoc je to nepríjemná situácia,
hlavne vám nesmie chýbať motivácia.
V opravovaní konečne prebehla finalizácia,
na konci časáku je teda vaša bonifikácia.
Najlepších čaká sústredko - matematikov koncentrácia,
tam kdejaká matická operácia,
vynikajúcich raňajok degustácia
i kopec srandy a socializácia.
Už sa na vás všetkých teší celá vedúcich delegácia!

Vaši milovaní vedúci *MATIK*a

Ako bolo

Tábor mladých matematikov

Aj tento rok sa stretlo vyše 30 účastníkov na Tábore mladých matematikov, ktorý sa tento rok konal v Penzióne pod Sitnom.
Po príchode na miesto sme prešli rekvalifikačným kurzom, ktorý z nás spravil podnikateľov ako sa patrí. Prešli sme od základov, akými sú marketing či reklama, k pokročilejším dôležitostiam, ako napríklad reputácia a dobré meno medzi obyvateľmi. Po týchto začiatkoch sme mohli konečne plnohodnotne rozvíjať naše firmy a venovať sa vlastným patentom. V tom sme však prišli na to, že náš blahodarca, Lord Cashington, si patentoval presne ten istý nápad vždy deň vopred, čím nás absolútne vyšachoval. Keďže sme chceli zachrániť naše firmy, museli sme prísť na to, v čom je problém. Po zistení, že Lord Cashington má doma portál, ktorým sa pozerá do budúcnosti, sme sa rozhodli ho zlikvidovať. Bola to tŕnistá cesta, museli sme prejsť cez Cashingtonovu ochranku a jeho trezor. Avšak nás nič nezastavilo, zariadili sme, aby sa Cashington prepadol svojím portálom a už nikdy nevrátil, a spokojne sme mohli rozvíjať naše firmy aj naďalej.
Okrem prednášok a seminárov na zaujímavé matematické i nematematické témy sme zažili kopec zaujímavých hier a športov. Nezabudnuteľnými ostanú všetky zážitky spojené najmä s kamarátmi, s ktorými sa uvidíme zase raz až o rok, a už teraz sa na to tešíme.

Vzorové riešenia 1. série úloh zimného semestra

1

opravovali **Peter Kovács** a **Lenka Hake** • 101 r.

najkrajšie riešenie: Zoe Kolarčíková, Karin Eštoková, Eva Krajčiová

Zadanie

Majme mriežku 3×3, v ktorej sú rozmiestnení pravdovravci a klamári (na každom políčku práve jeden). Pravdovravci vždy hovoria pravdu a klamári vždy klamú. Každý z nich vyslovil vetu: „Na políčkach, ktoré susedia stranou s mojím políčkom, stoja práve dvaja takí, ako ja.“ Ako mohli byť rozmiestnení na mriežke? Nájdite všetky možnosti.

Riešenie

Najprv si ujasnime, čo pre nás výrok „Na políčkach, ktoré susedia stranou s mojím políčkom, stoja práve dvaja takí, ako ja.“ znamená. Ak to prehlási pravdovravec, tak má práve dvoch susedov pravdovravcov a ľubovoľný počet susedov klamárov. Ak to prehlási klamár, tak má viac alebo menej ako dvoch susedov klamárov a ľubovoľný počet susedov pravdovravcov. To môže znamenať 0, 1, 3 alebo 4 susedov klamárov.
Všimnime si rohové políčka. Sú pre nás zaujímavé tým, že susedia práve s dvoma inými políčkami. Pozrime sa ako by vyzerala tabuľka, ak by v niektorom z rohov stál pravdovravec. Takto umiestnený pravdovravec má dvoch susedov, z ktorých práve dvaja musia byť tiež pravdovravci. Obaja nový pravdovravci stoja na hranách a majú troch susedov, z ktorých jeden už je pravdovravec. Aby títo pravdovravci na hranách hovorili pravdu, môžeme dosiahnuť buď tak, že umiestnime dvoch pravdovravcov do rohov s nimi susediacich alebo jedného pravdovravca do stredu tabuľky.
Ak by sme do stredu tabuľky postavili pravdovravca, tak by on a rovnako aj pravdovravci na hranách už mali dvoch susedov pravdovravcov, a preto by ich ostatní susedia museli byť klamári. Posledné voľné rohové políčko by však susedilo práve s dvoma klamármi, takže by na ňom nemohol stáť ani pravdovravec ani klamár. V strede tabuľky teda nemôže stáť pravdovravec.
Keďže na stredovom políčku stojí klamár, tak aby pravdovravci na hranách neklamali, musia byť v rohoch s nimi susediacich tiež pravdovravci. Ak budeme postupne vypĺňať tabuľku zistíme, že na všetkých krajných políčkach musia byť pravdovravci. Všimnime si, že toto rozostavenie je riešením úlohy. Ostáva ešte overiť, či iné rozostavenie nebude taktiež vyhovujúce.
Pozrime sa, ako by vyzerala tabuľka, ak by v každom rohu stál klamár. Nesmie susediť s práve dvoma ďalšími klamármi, takže aspoň na jednom z dvoch susedných políčok určite stojí pravdovravec. Tento pravdovravec stojí na hrane a susedí s tromi políčkami, pričom na jednom z nich už stojí klamár. Aby pravdovravec na hrane neklamal, tak jeho dvaja zvyšní susedia musia byť tiež pravdovravci. Tým sa dostávame do situácie, v ktorej je v niektorom z rohov pravdovravec. Túto možnosť sme

si už rozobrali vyššie.
Zistili sme, že nemôže stáť v každom rohu klamár, a že ak v niektorom z rohov stojí pravdovravec, tak existuje len jedno rozostavenie vyhovujúce podmienkam zadania: 1 klamár v strede a všade inde pravdovravci. Toto riešenie je jediné možné.

Komentár

Väčšine riešiteľov sa podarilo nájsť riešenie úlohy. To však nie je koniec. Treba ukázať, že to je naozaj jediné riešenie. Niektorí chceli ukázať, že sa jedná o naozaj jediné riešenie, no zvolili nevhodný systém rozoberania prípadov a na nejaký zabudli.

2

opravovali **Kristín Mišlanová**, **Kubo Farbula**, **Lujza Milotová** 78 r.
najkrajšie riešenie: Lucka Chladná

Zadanie

Mória, Arga a Titanika hrali kartovú vojnu pre troch hráčov v niekoľkých kolách. Pred začiatkom hry sa dohodli, koľko bodov bude pre víťaza, druhého a porazeného, pričom body budú rovnaké vo všetkých kolách a všetky body budú celé číslo. Víťazstvo malo samozrejme najvyššie skóre. Porazený získal najnižšie skóre, ale stále aspoň 1 bod. Arga zvíťazila v druhom kole. Konečné skóre bolo: Mória získala celkovo 20 bodov, Arga 10 bodov a Titanika 9 bodov. Zistite, či táto informácia jasne určuje kto vyhral prvé kolo a koľko bodov získala v poslednom kole Titanika.

Riešenie

Počet kôl:
Celkový počet bodov vo všetkých kolách je $20 + 10 + 9 = 39$. Tento počet sa bude rovnať *počtu kôl* krát *počet bodov rozdelených v jednom kole*. Celkový počet bodov v jednom kole je aspoň $1 + 2 + 3 = 6$ bodov. Rozoberieme teda všetky možnosti:

- $1 \cdot 39$ - táto možnosť nevyhovuje, lebo zo zadania vieme, že Arga vyhrala v druhom kole
- $39 \cdot 1$ - táto možnosť nevyhovuje, lebo vieme, že celkový počet bodov v jednom kole je aspoň 6
- $3 \cdot 13$ - táto možnosť vyhovuje
- $13 \cdot 3$ - táto možnosť nevyhovuje, lebo vieme, že celkový počet bodov v jednom kole je aspoň 6

Hrali sa 3 kolá a v každom kole sa rozdelilo dokopy 13 bodov.

Počet bodov za výhru:
Vieme, že Arga v celej hre získala 10 bodov a aspoň raz vyhrala. Ak by aj dvakrát prehrala a za prehru by bol 1 bod, tak $10 - 1 - 1 = 8$. Za výhru mohlo byť najviac

8 bodov (9 alebo viac to nemohlo byť, pretože zo zadania vieme, že za prehru bol aspoň 1 bod).
Vieme, že Mória získala dokopy 20 bodov. Z toho vieme zistiť, že minimálny počet bodov za výhru musel byť 7, pretože ak by to bolo 6 alebo menej, tak aj keby Mória trikrát vyhrala, nedosiahla by počet bodov rovný 20 (vedeli by sme získať len $6 + 6 + 6 = 18$).
Ak by bol počet bodov za výhru 7, tak ak by Mória trikrát vyhrala, mala by už 21 bodov. Ak by vyhrala dvakrát, za jej posledné z troch umiestnení by musel byť počet bodov 6, aby platilo $7 + 7 + 6 = 20$. Vieme, že súčet bodov v jednom kole je 13, pričom za výhru by bolo 7 a niektoré ďalšie miesto 6 bodov, takže na posledné umiestnenie by ostalo 0 bodov. Čo zo zadania ale vieme, že sa stať nemôže. Menej ako dvakrát vyhrať Mória nemôže, pretože potom by sme tých 20 bodov už určite nevyskladali. Počet bodov za výhru teda musel byť 8.

Jednotlivé body:
Vieme, že Arga vyhrala raz a dokopy získala 10 bodov. V druhom kole získala 8 bodov. V prvom a treťom kole dokopy musela získať 2 body. V oboch kolách musela získať po jednom bode a z toho vyplýva, že za prehru bol 1 bod.
Keďže vieme, že v jednom kole sa rozdalo vždy dokopy 13 bodov (body za výhru + body za druhé miesto + body za prehru), tak už vieme vypočítať počet bodov za druhé miesto: $13 - 8 - 1 = 4$.

Arga: 1. kolo prehrala, 2. kolo vyhrala, 3. kolo prehrala.

Aby Mória mala dokopy 20 bodov, tak musela dvakrát vyhrať a raz byť druhá ($8 + 8 + 4 = 20$). Pre Titaniku nám zvýšili miesta aké musela obsadiť.

Mória: 1. kolo vyhrala, 2. kolo bola druhá, 3. kolo vyhrala.

Titanika: 1. kolo bola druhá, 2. kolo prehrala, 3. kolo bola druhá.

	Mória	Arga	Titanika	Spolu
1.kolo	8	1	4	13
2.kolo	4	8	1	13
3.kolo	8	1	4	13
Spolu	20	10	9	

Prvé kolo vyhrala Mória a v treťom kole získala Titanika 4 body.

Komentár

V takýchto úlohách je dôležité sa nezastaviť v , keď človek nájde riešenie. Nikde sme vám totižto nesľúbili, že riešenie bude len jedno ;) Veľa z vás sa totižto uspokojilo s tým, že pri 3 kolách našlo riešenie, respektíve pri 8 bodoch za výhru. Vtedy je však namieste si položiť otázky: Čo ak tých kôl bude viac? Bodov za výhru menej? Riešenia bez odpovedí na tieto otázky sú potom bohužiaľ aj bez veľkého počtu bodov.

3 opravovali **Daniel Onduš**, **Klára Hricová** a **Erik Novák** • 74 riešení

najkrajšie riešenie: Miriam Horváthová a Štefan Vašak

Zadanie

Magický kruh je tvorený 13 kameňmi. V 12 kameňoch sa nachádza v každom rovnaký počet magických kryštálov a v jednom kameni je o jeden kryštál menej. Pri každom rituáli si môžeme vybrať práve 10 kameňov, v ktorých vznikne jeden nový kryštál. Ukážte, že vieme vyberať kamene tak, aby sme na konci dostali 13 kameňov s rovnakým počtom kryštálov. Čo ak by kameňov bolo 14 a v jednom by bol o jeden kryštál menej?

Riešenie

Nech x je počet kryštálov v každom kameni po prevedení všetkých rituálov, k je počet kryštálov na začiatku vo všetkých kameňoch okrem jedného, v ktorom je o jeden menej a r je celkový počet vykonaných rituálov. Keďže nemôže existovať záporný alebo necelý počet kryštálov, rovnako ako nemôžeme spraviť záporný alebo necelý počet rituálov, tak čísla r, x a k musia byť prirodzené. My chceme dosiahnuť stav, v ktorom je v každom kameni rovnaký počet kryštálov, a teda v ňom platí:

$$13x = 13k - 1 + 10r$$

Pretože na konci máme v každom kameni x kryštálov a získali sme ich tak, že k pôvodným $13k - 1$ sme v každom rituále pridali 10 kryštálov. Toto vieme upraviť ako:

$$13(x - k) = 10r - 1$$

Hľadáme násobok čísla 13, ktorý je deliteľný číslom, ktoré vieme zapísať ako $10r - 1$. Násobky čísla 13 sú 0, 13, 26, 39,... Číslo 39 môžeme napísať v tvare $10 \cdot 4 - 1$. Keďže táto rovnica má riešenie, určite vieme pri 13 kameňoch dôjsť nejakým počtom rituálov do stavu, kedy sa počty kryštálov v nich rovnajú. Keďže zadanie nás žiada aj ukázať, ako kamene vyberať, označme si kameň v ktorom je o kryštál menej ako 1 a zvyšné číslami 2 až 13. Kryštály budeme pridávať nasledovne:

1. rituál: kameň 1 a kamene 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
2. rituál: kameň 1 a kamene 11, 12, 13, 2, 3, 4, 5, 6, 7
3. rituál: kameň 1 a kamene 8, 9, 10, 11, 12, 13, 2, 3, 4
4. rituál: kameň 1 a kamene 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13

Do kameňa 1 sme pridali 4 kryštály a do zvyšných po 3, takže vo všetkých je rovnaký počet kryštálov.
Druhú časť úlohy riešime analogicky - aby sa úloha dala splniť, musí platiť:

$$14(x - k) = 10r - 1$$

Vidíme, že ľavá strana rovnica je určite párna, pretože je to násobok čísla 14 a pravá je určite nepárna, pretože od násobku čísla 10 odčítavame 1. Táto rovnica teda riešenie nemá, lebo párne číslo sa nikdy nebude rovnať nepárnemu. Pre 14 kameňov sa teda stav, kde sa počty kryštálov v kameňoch rovnajú, nedá dosiahnuť žiadnym počtom rituálov.

Iné riešenie

Pozrime sa na túto úlohu trochu všeobecnejšie. Nech máme nejakých n kameňov, pričom v jednom je o jeden kryštál menej ako v ostatných. V každom rituále budeme pridávať m kryštálov. Nech $D > 1$ je najväčší spoločný deliteľ čísel n a m. Vidíme, že ak na začiatku celkový počet kryštálov má zvyšok -1 po delení číslom n, tak nie je deliteľný ani číslom D. Zároveň, ak vždy pridáme do celkového počtu m kryštálov, tak pridávame počet deliteľný číslom D. Očividne preto na konci nemôžeme dostať počet kryštálov deliteľný číslom D, čiže ani číslom n.
Tento postup sa dal použiť v druhej časti úlohe, keďže čísla 14 a 10 majú spoločného deliteľa 2.
Naopak, ak sú čísla m a n nesúdeliteľné, tak sa dá ukázať, že ak budeme pridávať kryštály postupne do kruhu, tak časom dospejeme k rovnakému počtu kryštálov vo všetkých kameňoch.

Komentár

Úlohu väčšina z vás uchopila celkom dobre. Prvú časť ste zvládli dokázať všetci. Problém však prichádzal pri druhej časti úlohy. Tam totižto veľmi častou chybou bolo, že ste vyskúšali jeden postup pridávania kryštálov a po zistení, že sa vám stav kryštálov opakuje, ste zhodnotili, že to tak bude vždy. Vyskúšať jednu možnosť však určite nie je pri takýchto úlohách postačujúce riešenie a vždy ich treba dokazovať všeobecne - pre všetky možnosti.

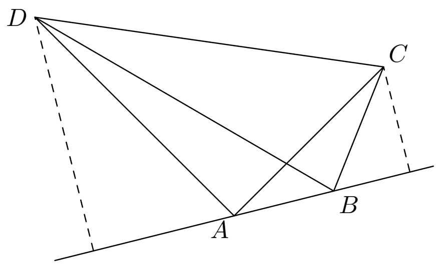
4 opravovali **Martin Šalagovič** a **Martin Števko** • 78 riešení

najkrajšie riešenie: Adelka a Mirka Horváthové, Katka Farbulová

Zadanie

Runa, ktorú má Harold analyzovať je taký konvexný štvoruholník, čiže každý jeho uhol je menší ako 180°, že každá z uhlopriečok ho delí na dva trojuholníky rovnakého obsahu. Dokážte, že táto runa je rovnobežník.

Riešenie



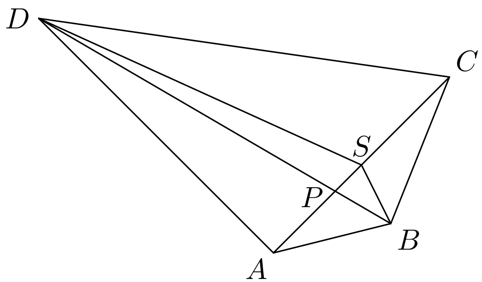
Podľa zadania vieme, že $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD} = S_{ABD}$ (za predpokladu, že S_X označuje obsah útvaru X). Keďže obsah trojuholníka vyrátame ako

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

(kde a je dĺžka strany trojuholníka a v_a je výška na ňu), tak trojuholníky ABC a ABD musia mať rovnako dlhú výšku na stranu AB, pretože majú rovnaký obsah aj stranu.

Z toho vyplýva, že body C aj D sú od $\overleftrightarrow{AB}$ vzdialené rovnako, teda $AB \parallel CD$. Rovnako podľa trojuholníkov ABC a BCD dokážeme $AD \parallel BC$. Potom sa určite jedná o rovnobežník, pretože má dvojice protiľahlých strán rovnobežné a teda aj rovnako dlhé.

Iné riešenie



Majme všeobecný štvoruholník $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok P ako na obrázku. Stred uhlopriečky AC označme S. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme povedať, že bod P leží na uhlopriečke AC tak, že zároveň leží aj na úsečke AS. Zo zadania vieme $S_{ABC} = S_{ACD}$ (za predpokladu, že S_X označuje obsah útvaru X).

Keďže ťažnica rozdeľuje trojuholník na 2 obsahovo zhodné trojuholníky, vieme, že $S_{ABS} = S_{BCS}$ v trojuholníku ABC a $S_{ADS} = S_{SCD}$ v trojuholníku ACD. Ak tieto 2 rovnice sčítame, dostaneme

$$S_{ABS} + S_{ADS} = S_{BCS} + S_{SCD}$$
$$S_{ABSD} = S_{BCDS}$$
$$S_{ABD} + S_{BSD} = S_{BCD} - S_{BSD}$$

Môžeme si ale všimnúť, že na to, aby platila táto rovnica, ktorú sme dostali zo zadania, musí platiť $S_{BSD} = 0$. Ale aký trojuholník má nulový obsah? Žiaden. Nebude to totiž trojuholník, ale len úsečka, čo znamená, že bod S leží na uhlopriečke BD, no zadaný bol ako stred uhlopriečky AC, takže uhlopriečka BD rozpoľuje uhlopriečku AC. Rovnako dokážeme, že uhlopriečka AC rozpoľuje uhlopriečku BD, teda štvoruholník, v ktorom sa uhlopriečky rozpoľujú, je rovnobežník. Ak nám neveríte, môžete si to dokázať cez zhodnosť trojuholníkov, ktoré vzniknú po rozdelení štvoruholníka uhlopriečkami.

Komentár

Úloha nedopadla veľmi úspešne, no aj napriek tomu sa našli aj veľmi pekné a originálne riešenia. Hlavnou chybou bolo dokazovanie niečoho iného, ako bolo zadané v úlohe. Podľa úlohy ste mali dokázať, že ak štvoruholník spĺňa nejaké podmienky, musí to byť rovnobežník. Namiesto toho ste sa však väčšinou zamerali na dokazovanie, že to rovnobežník môže byť a tá časť, ktorá ukazuje, prečo to nemôže byť nič iné, vám buď úplne chýbala alebo ste ju spomenuli len okrajovo. Veríme, že nabudúce, keď sa stretnete s podobnou úlohou, dopadne oveľa úspešnejšie. :) Na záver ešte jeden tip... Každé dobré riešenie geometrickej úlohy by malo obsahovať obrázok. Tým chceme povedať to, že je to dobrým zvykom, ale minimálne ak v riešení pracujete s bodmi/uhlami, ktoré v zadaní nie sú označené, vo vašom obrázku (stačí náčrt) by mali byť. Bude to jednoduchšie pre vás aj pre nás.

5 opravovali **Martin**, **Michal** a **Matúš Masrnovci** 81 riešení
najkrajšie riešenie: Sara Gašparová

Zadanie

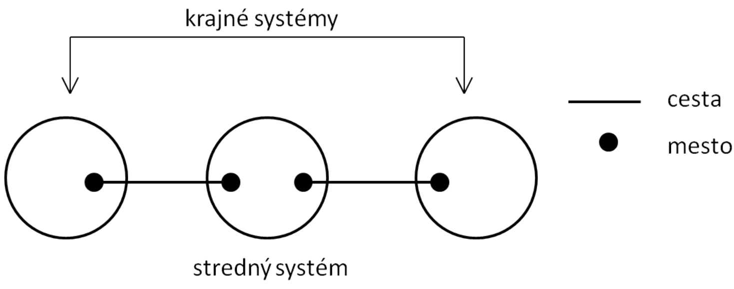
V tejto dimenzii sa nachádza niekoľko miest, o ktorých platí:

- Z každého mesta vychádzajú práve 3 cesty, z toho každá končí v inom meste, teda medzi dvoma mestami môže byť maximálne jedna neprerušená cesta.
- Z každého mesta sa dá pomocou ciest dostať do akéhokoľvek iného mesta.
- V tomto systéme ciest sa nachádzajú práve dve cesty také, po ktorých zničení sa mestá rozdelia na tri samostatné systémy, z ktorých sa nedá dostať do zvyšných dvoch. Tieto dve cesty končia v štyroch rôznych destináciách, teda každé z miest môže mať pri sebe maximálne jednu zničenú cestu.

Koľko najmenej miest môže v tejto dimenzii existovať? Nezabudnite načrtnúť, ako by mohli byť pospájané.

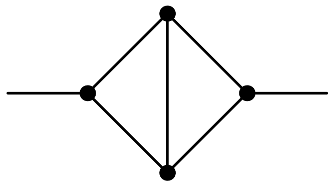
Riešenie

Na začiatok si načrtnime 4 mestá a 2 cesty, ktoré keď zničíme, vzniknú nám 3 samostatné systémy miest:

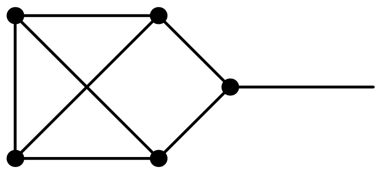


Pokiaľ chceme dosiahnuť to, aby bolo v dimenzii čo najmenej miest, musíme dosiahnuť to, aby v každom z jednotlivých systémov bolo čo najmenej miest.
Zoberme si najprv stredný systém. Máme v ňom už 2 mestá, z ktorých z každého vedie 1 cesta. Keby sme ich spojili navzájom, tak sú stále obe spojené iba s dvomi ďalšími mestami. Preto vnútri tohto systému potrebujeme pridať ešte aspoň 1 mesto.

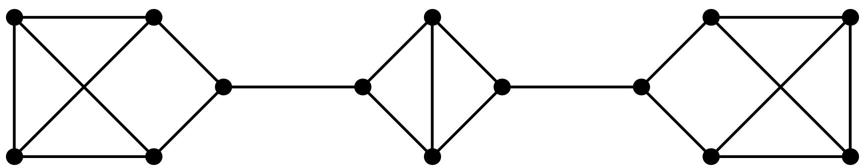
Toto mesto však vieme spojiť iba s dvomi mestami, ktoré v tomto systéme už sú, lenže my ho musíme spojiť s tromi inými mestami. To znamená, že musíme pridať dovnútra tohto systému ešte aspoň 1 ďalšie mesto. Na 4 mestá sa to už dá, a to takto:



Zoberme si teraz jeden z krajných systémov. Máme v ňom už 1 mesto, ktoré je spojené s jedným ďalším mestom. Ale keďže musí byť spojené s tromi inými mestami, musíme dovnútra systému ešte aspoň 2 ďalšie pridať. Ak si teraz zoberieme jedno z miest, ktoré sme pridali, tak aj keby sme ho spojili s tým druhým, tak by stále obe boli spojené iba s dvomi ďalšími mestami. To znamená, že musíme pridať do tohto systému ešte aspoň 1 ďalšie mesto. Takže tam budú minimálne 4.
Každé mesto je spojené s tromi inými mestami, preto pokiaľ by v systéme mali byť 4 mestá, znamenalo by to, že medzi nimi má byť $4 \cdot 3 = 12$ spojení (spojenie je jednosmerné). Jedno z nich, ktoré systém spája so stredným systémom, už vychádza von zo systému, a preto by vnútri systému muselo byť ešte 11 spojení. Avšak keďže cesta je obojsmerná, teda spája jedno mesto s druhým a zároveň druhé s prvým, tak spojení vnútri systému musí byť párny počet. Na 4 mestá to teda nepôjde.
Skúsme 5 miest. To by v systéme muselo byť $5 \cdot 3 = 15$ spojení, z čoho jedno ide von zo systému, teda vnútri systému bude 14 spojení, čo je 7 ciest, keďže cesta je obojsmerná. Na 5 miest to skutočne ide, a to takto:



Krajné systémy sú symetrické, keďže z oboch ide len jedna cesta von zo systému. Preto druhý krajný systém bude vyzerať rovnako ako prvý, čiže v ňom bude 5 miest. Celá dimenzia bude vyzerať takto:



Najmenší počet miest, ktorý v dimenzii môže byť, je 14.

Komentár

Mnohým z vás sa podarilo dopracovať k správnemu riešeniu, väčší problém však bol so zdôvodnením, prečo miest nemôže byť menej. Bolo treba dokázať, že ani pre jeden zo systémov to skutočne nejde, a to, že niečo platí pre stredný systém, neznamená nutne, že to bude platiť aj pre krajné systémy. Veľa z vás si takto chcelo uľahčiť prácu, čo však často viedlo k neúplnému riešeniu a strhnutým bodom.

6 opravovali **Tomáš Kocák** a **Patrik Paľovčík**

najkrajšie riešenie: Všetky 9-bodové riešenia

49 riešení

Zadanie

Starček mal 100 kartičiek s číslami od 1 do 100 (na každej kartičke iné číslo). Všetky mu však popadali a našiel len 21 z nich. Starček chce vybrať 4 kartičky a umiestniť ich do rovnosti $\square + \square = \square + \square$. Bude mať dosť kartičiek na splnenie tejto úlohy, bez ohľadu na to, akých 21 kartičiek mu ostalo k dispozícii?

Riešenie

Pozrime sa na to, koľko rôznych súčtov vieme dostať sčítaním dvoch rôznych čísel od 1 do 100:

- Ak sčítame dve najmenšie čísla, dostaneme súčet $1 + 2 = 3$.
- Ak sčítame dve najväčšie čísla, dostaneme súčet $99 + 100 = 199$.
- Navyše vieme dostať všetky čísla medzi 3 a 199 (čísla od 3 do 101 vieme dostať ako $1+2$ až $1+100$ a čísla od 102 do 199 vieme dostať ako $100+2$ až $100+99$).

Teda vieme dostať 197 rôznych súčtov (od 3 do 199).

Ďalej sa pozrime na to, koľko rôznych dvojíc kartičiek vieme vybrať spomedzi 21, ktoré starček našiel. Máme 21 možností pri výbere prvej kartičky a 20 pri výbere druhej, keďže jednu sme už vybrali a každé číslo je tam práve raz. Ak by sme ale vynásobili $21 \cdot 20$, zarátali by sme každú možnosť dvakrát, nám však na tom, ktorú kartičku z dvojice vyberieme ako prvú nezáleží, takže možností ako vybrať 2 kartičky z 21 je $(21 \cdot 20)/2 = 210$.

Máme len 197 rôznych súčtov, ktoré dve kartičky môžu dávať, ale až 210 dvojíc kartičiek. Keďže máme viac dvojíc ako počtov súčtov, znamená to, že nejaké dve **rôzne** dvojice (nevylučujeme, že ich nie je viac) musia mať rovnaký súčet.

Kartičky potrebujeme umiestniť do rovnosti zo zadania a preto posledný krok je ukázať, že dvojice, ktoré sme vybrali, obsahujú 4 rôzne kartičky. Čo by sa stalo, ak by tieto dvojice mali nejakú rovnakú kartičku? Aby mali rovnaký súčet, museli by mať aj druhú kartičku rovnakú, čo znamená, že by to už neboli dve rôzne dvojice, ale dvakrát tá istá. Rovnaké súčty teda dávajú dvojice so 4 rôznymi kartičkami, a teda starčekovi stačí 21 kartičiek.

Komentár

Vo väčšine riešení sa vám podarilo ukázať, že z 21 kariet vieme vybrať 210 dvojíc a potom použiť fakt, že existuje menej rozdielov alebo súčtov, ktoré dvojice môžu nadobúdať. Tu si ale bolo treba dávať pozor na to, že týchto 210 dvojíc môže obsahovať aj zhodné kartičky, čo starčekovi nemuselo pomôcť.

Autori vzorových riešení: Žaneta Semanišinová, Florián Hatala, Martin Masrna, Kristína Mišlanová, Daniel Onduš, Jakub Genči, Zuzana Ontkovičová

Zadania 2. série úloh zimného semestra

Riešenia pošlite najneskôr do **26. novembra 2018**

Pozor! Zmena termínu druhej série!

Úloha 1

Mláčka mala tvar rovnoramenného trojuholníka ABC so základňou AB a obsahom 12. Bod D sa nachádza v opačnej polrovine určenej priamkou AB ako bod C, pričom trojuholník DBA je podobný s trojuholníkom ABC. Výška trojuholníka ABC z bodu C pretína priamku BD v bode X. Aký je obsah trojuholníka XBC?

Úloha 2

Počas sto dní každý zo šiestich koní jedol práve 75 dní. Koľko najviac a koľko najmenej mohlo byť dní, počas ktorých jedlo aspoň päť koní?

Úloha 3

Na oslave sú dievčatá a chlapci. Každý z 21 chlapcov na oslave pozná práve 4 dievčatá a každé dievča pozná práve 14 chlapcov (známosti sú obojstranné). Dokážte, že ľubovoľní dvaja chlapci majú aspoň dve spoločné známe.

Úloha 4

Majme 5 prirodzených čísel väčších ako 1 a neprevyšujúcich 120, o ktorých vieme, že nie sú prvočísla. Dokážte, že vždy vieme vybrať dve z nich, ktorých najväčší spoločný deliteľ je väčší ako 1.

Úloha 5

Zaujímavý útvar vyzeral nasledovne: Vo štvorci $ABCD$ je stred strany AB označený ako M. Priamka kolmá na priamku MC prechádzajúca bodom M pretína stranu AD v bode K. Ukážte, že veľkosti uhlov BCM a KCM sú rovnaké.

Úloha 6

Koľko najmenej strelcov musíme umiestniť na šachovnicu 8×8 tak, aby každé políčko bolo ohrozené?

Poradie po 1. sérii zimného semestra

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	PS	CS
1. - 4.	Lucia Chladná	Z7	GAMČABA	9	9	9	9	9	9	0	**54**
	Samuel Osuský	Z8	ZDrJDMA	9	9	9	9	9	9	0	**54**
	Barbora Baltovičová	Z8	GAlejKE	9	9	9	9	9	-	0	**54**
	Richard Vodička	Z7	GAlejKE	9	9	5	9	9	9	0	**54**
5.	Adam Džavoronok	Z9	ZSlobKE	9	9	8	9	9	9	0	**53**
6.	Michal Iľkovič	Z7	ZBPPGPO	9	9	9	2	9	7	0	**52**
7.	Sara Gašparová	Z9	GABerSC	9	9	9	9	9	6	0	**51**
8.	Martin Kopčány	Z9	GJChaBR	9	7	9	9	9	7	0	**50**
9. - 10.	Michal Židzik	Z9	ZJŠveHE	6	9	9	9	9	7	0	**49**
	Karin Eštoková	Z9	GMRŠKE	9	9	9	9	6	7	0	**49**
11.	Katarína Farbulová	Z7	GAlejKE	7	9	5	9	4	9	0	**48**
12. - 13.	Miriam Horváthová	Z9	ZKomeMI	8	4	9	9	9	7	0	**46**
	Patrik Barnišin	Z7	ZBPPGPO	8	6	9	-	7	7	0	**46**
14. - 15.	Eva Krajčiová	Z6	GAlejKE	9	6	9	6	6	6	0	**45**
	Ondrej Králik	Z7	GAlejKE	8	5	5	9	9	1	0	**45**
16.	Tomáš Kubrický	Z7	ZKro4KE	8	9	9	2	7	-	0	**44**
17. - 18.	Alex Fabrici	Z7	ZPAngKE	9	9	7	-	9	-	0	**43**
	Marek Horváth	Z7	GKonšPO	9	8	9	-	5	3	0	**43**
19. - 20.	Veronika Vodičková	Z7	GAlejKE	9	4	5	0	8	7	0	**42**
	Štefan Vašak	Z9	ZKe30KE	7	7	9	9	7	3	0	**42**
21. - 22.	Matej Kundrík	Z8	ZKro4KE	5	9	7	8	1	7	0	**41**
	Tomáš Gaja	Z8	ZKro4KE	9	7	5	9	6	-	0	**41**
23.	Terézia Stanová	Z8	EGJAKKE	5	9	9	6	6	-	0	**40**
24.	Nina Pacholská	Z7	ZKro4KE	9	9	9	2	-	-	0	**38**
25. - 26.	Karol Jakubčák	Z9	ZKro4KE	9	9	9	1	9	-	0	**37**
	Jakub Kulka	Z9	GMRŠKE	9	6	7	8	0	7	0	**37**
27.	Martin Šmilňák	Z8	GAlejKE	8	9	5	9	2	-	0	**35**
28.	Adela Horváthová	Z8	ZDnepKE	5	2	5	9	4	7	0	**34**
29. - 30.	Ján Brajerčík	Z8	ZŠmerPO	8	8	5	0	2	7	0	**32**
	Eduard Fedorčuk	Z8	EGJAKKE	8	4	7	2	9	-	0	**32**
31.	Ľubomír Vargovčík	Z9	ZKe30KE	7	7	5	4	4	3	0	**30**
32. - 36.	Natália Poliačiková	Z7	ZKro4KE	-	9	9	2	-	-	0	**29**
	Jakub Blišťan	Z8	GAlejKE	9	9	5	-	2	2	0	**29**
	Patrik Sremaňák	Z9	ZKro4KE	5	-	9	9	6	-	0	**29**
	Zoe Kolarčíková	Z8	ZStanKE	9	9	9	-	2	-	0	**29**
	Ľubomíra Šenitková	Z7	GLipany	4	8	4	4	1	0	0	**29**
37. - 40.	Paulína Tkáčová	Z7	ZLevoSN	0	1	5	9	3	1	0	**28**
	Lukáš Jacko	Z7	ZKro4KE	5	2	7	0	7	0	0	**28**
	Martin Dudjak	Z7	SMládPP	4	9	5	1	0	0	0	**28**
	Vladimír Boguský	Z7	ZJuhVnT	7	1	5	2	0	6	0	**28**
41. - 42.	Branislav Ječim	Z8	ZOKožSN	5	9	9	0	2	1	0	**27**
	Alžbeta Klimentová	Z8	ZLNovKE	5	1	9	-	7	4	0	**27**
43.	Matej Šoltés	Z8	GTrebKE	8	9	4	-	3	-	0	**24**
44. - 46.	Richard Gerboc	Z9	ZŠtefHE	5	9	5	0	4	0	0	**23**
	Kalista Semancová	Z7	ZSNP1HE	3	7	5	0	1	0	0	**23**
	Jana Mašlejová	Z9	ZKupPO	5	6	4	0	1	7	0	**23**
47. - 49.	Olívia Jánošíková	Z8	ZKro4KE	4	1	5	1	4	7	0	**22**

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	PS	CS
	Martin Šedovič	Z7	ZKro4KE	3	-	-	9	0	1	0	**22**
	Matej Vojtaník	Z7	ZKro4KE	7	1	5	0	2	-	0	**22**
50.	Natália Poliačiková	Z7	ZKro4KE	9	-	-	2	1	-	0	**21**
51. - 54.	Oskar Hritz	Z9	ZPoliKE	2	1	6	6	5	0	0	**20**
	Viktória Števková	Z8	ZMRŠHLC	9	2	5	4	-	-	0	**20**
	Filip Sabovčík	Z7	ZOKožSN	5	1	7	0	-	-	0	**20**
	Anežka Kasalová	Z9	KřeGPHA	4	0	8	7	1	0	0	**20**
55. - 56.	Alžbeta Szabová	Z9	EGJAKKE	7	6	5	1	0	-	0	**19**
	Erik Jochman	Z8	GAlejKE	6	2	5	1	4	0	0	**19**
57. - 58.	Matúš Chovančák	Z7	ZKro4KE	2	3	5	3	-	-	0	**18**
	Miriama Kmecová	Z7	ZKro4KE	1	5	5	2	-	-	0	**18**
59. - 62.	Barbara Michalíková	Z9	ZKro4KE	9	-	5	3	-	-	0	**17**
	Peter Varga	Z7	ZKro4KE	8	-	-	1	0	-	0	**17**
	Adam Bednář	Z9	EGJAKKE	7	4	4	-	1	1	0	**17**
	Tereza Kostiviarová	Z8	ZTSNPBB	5	6	5	1	-	-	0	**17**
63. - 67.	Matúš Mandzák	Z8	ZKro4KE	5	-	-	3	8	-	0	**16**
	Vladimir Slanina	Z7	ZKro4KE	4	1	5	-	1	-	0	**16**
	Dávid Kepič	Z8	GAlejKE	3	2	5	0	6	0	0	**16**
	Viliam Karol Kubičár	Z7	ZOKožSN	5	1	5	0	0	0	0	**16**
	Patrícia Gondášová	Z8	ZMRŠHLC	5	2	5	4	-	-	0	**16**
68. - 69.	Filip Olej	Z7	ZKro4KE	5	-	4	0	1	-	0	**15**
	Šimon Kirňák	Z8	ZOKožSN	4	-	9	2	-	-	0	**15**
70. - 74.	Timotej Jakubov	Z9	ZŠtefHE	5	-	8	1	-	-	0	**14**
	Samuel Čurma	Z9	ZJŠveHE	5	2	5	-	2	-	0	**14**
	Lenka Palušáková	Z7	ZOKožSN	5	0	4	0	0	0	0	**14**
	Tomáš Jakubec	Z7	ZOKožSN	3	1	5	0	0	0	0	**14**
	Alica Kvasňáková	Z8	ZOKožSN	9	5	-	-	-	-	0	**14**
75. - 78.	Ema Lola Škombárová	Z7	ZKro4KE	5	-	-	0	3	-	0	**13**
	Filip Fetyko	Z7	ZKro4KE	3	1	4	-	1	-	0	**13**
	Bianka Gurská	Z8	GAlejKE	4	2	5	2	-	-	0	**13**
	Jakub Muller	Z8	GAlejKE	3	4	5	-	1	-	0	**13**
79.	Eva Hricová	Z8	ZMRŠHLC	6	1	5	-	-	-	0	**12**
80. - 82.	Henrietta Antožy	Z7	ZKro4KE	4	2	-	0	1	-	0	**11**
	Tomáš Vitko	Z7	ZOKožSN	3	-	4	0	-	-	0	**11**
	Martin Kuchta	Z7	GAlejKE	3	2	-	-	3	-	0	**11**
83. - 85.	Jakub Babík	Z7	ZKro4KE	4	2	-	-	-	-	0	**10**
	Eduard Lehocký	Z7	ZKro4KE	5	-	-	-	-	-	0	**10**
	Michal Kaško	Z7	ZKro4KE	4	2	-	0	0	-	0	**10**
86.	Petra Chomová	Z8	ZKro4KE	5	-	-	-	3	-	0	**8**
87.	Tereza Pažinová	Z8	ZKro4KE	1	-	-	-	6	-	0	**7**
88.	Tomáš Vysoký	Z8	ZKro4KE	6	-	-	-	0	-	0	**6**
89. - 91.	Pavol, Alexander Komloš	Z8	ZKro4KE	4	-	-	-	1	-	0	**5**
	Alena Závodníková	Z8	ZKro4KE	4	-	-	-	1	-	0	**5**
	Katarína Žiaková	Z9	GKukuPP	4	0	-	1	-	-	0	**5**
92. - 93.	Ivonne Hančikovská	Z8	ZKro4KE	1	1	-	-	1	-	0	**3**
	Maximilian Bak	Z8	ZKro4KE	2	-	-	-	1	-	0	**3**
94. - 101.	Juraj Šuhaj	Z8	ZKro4KE	2	-	-	-	0	-	0	**2**
	Zuzana Benešová	Z7	ZKro4KE	1	-	-	0	0	0	0	**2**
	Daniel Miščík	Z7	ZKro4KE	0	-	-	-	1	0	0	**2**

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	PS	CS
	Silvia Čobanová	Z8	ZKro4KE	-	1	1	-	-	-	0	**2**
	Miroslav Chodúr	Z8	ZMRŠHLC	2	-	-	0	-	0	0	**2**
	Barbara Birošová	Z9	ZOKožSN	-	-	-	2	-	-	0	**2**
	Adam Harmanský	Z8	ZKro4KE	2	-	-	-	0	-	0	**2**
	Maximiliána Ferencová	Z7	ZOKožSN	1	-	-	-	-	-	0	**2**
102. - 106.	Boris Pasterňak	Z8	ZKro4KE	1	-	-	0	-	-	0	**1**
	Michal Chovančák	Z8	ZKro4KE	-	-	-	-	1	-	0	**1**
	Juliána Dovalová	Z9	ZOKožSN	-	-	-	1	-	-	0	**1**
	Lucia Zajacová	Z9	ZOKožSN	-	-	-	1	-	-	0	**1**
	Emma Murdžáková	None	ZOKožSN	-	1	-	-	-	-	0	**1**
107. - 114.	Michal Dvořáček	Z8	ZKro4KE	-	0	-	-	-	0	0	**0**
	Matej Vojtaník	Z7	ZKro4KE	-	-	-	0	-	-	0	**0**
	Yarden Cohen	Z7	ZKro4KE	0	-	-	0	-	-	0	**0**
	Samuel Torhány	Z7	GAlejKE	0	0	-	0	-	0	0	**0**
	Tomáš Hamrák	Z9	ZOKožSN	-	-	-	0	-	-	0	**0**
	Jakub Lukáč	Z7	ZJuhVnT	0	-	-	0	0	0	0	**0**
	Matěj Fober	Z7	ZJuhVnT	0	0	-	0	-	-	0	**0**
	Juraj Pavolko	Z9	ZJuhVnT	-	-	-	-	0	0	0	**0**

Názov: *MATIK* – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 2 • November 2018 • Zimný semester 32. ročníka
Internet: `matik.strom.sk`
E-mail: `matik@strom.sk`

Organizátor: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach,
Prírodovedecká fakulta, Šrobárova 2, 041 54 Košice
Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM
ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk