Korešpondenčný Matematický Seminár

MATIK

Číslo 2 – Ročník 31 matik.strom.sk

Ahojte!

Prvá séria je už za nami, škola už je v plnom prúde a vy sa už isto neviete dočkať prázdnin. Aby vám to čakanie rýchlejšie ubehlo, prinášame vám druhú sériu príkladov, ktoré môžte počítať. Tiež sa môžte pokochať výsledkovkou, aby ste videli, či vaše úsilie stálo za to. Aby ste mali aj nejakú motiváciu, tak vedzte, že keď sa vo výsledkovke umiestnite dobre, odmena vás neminie. Pozveme vás na parádne zimné sústredenie, kde si užijete kopec srandy. Prajeme vám veľa šťastia pri počítaní!

Vaši milovaní vedúci MATIKa

Ako bude

Lomihlav

Tak ako každý rok, aj tento rok nás čaká začiatkom decembra súťaž Lomihlav. Je to súťaž štvorčlenných družstiev žiakov siedmeho až deviateho ročníka alebo sekundy až kvarty reprezentujúcich svoju školu. Ich úlohou je čo najlepšie vyriešiť 20 matematických úloh, 5 hlavolamov a 5 hádaniek. Tejto súťaže sa pravidelne zúčastňuje vyše stovka žiakov zo základných škôl, najmä z východného Slovenska. Majú šancu sa niečo nové naučiť, porovnať svoje sily s ostatnými a stretnúť kamarátov so záľubou v matematike.
Tohto roku sa súťaž Lomihlav uskutoční v piatok 1.12.2017 v priestoroch kultúrno-spoločenského centra na Jedlíkovej 7. Registrovať sa môžte do 16. novembra. Registračný formulár aj bližšie informácie o registrácii, súťaži a jej predchádzajúcich ročníkoch môžete nájsť na `https://matik.strom.sk/sk/lomihlav/`. Tešíme sa na Vás!

Sústredenie

Termín tohtoročného zimného sústredenia je už známy. Sústredenie sa bude konať 11.2. – 16.2.2018 a bude to v UVZ Danišovce. Dúfame, že sa na to tešíte tak ako aj my, a že sa tam s vami uvidíme.

Vzorové riešenia 1. série úloh zimného semestra

1 opravovali **Dano Onduš, Timka Szöllősová**

najkrajšie riešenia: Oskar Hritz, Adam Garafa

139 riešení

Zadanie

Zo všetkých piatich chlapcov iba jeden vie, kde našli drakkar. Avšak ani pri výsluchu nevravia všetci pravdu. Vyplašení pohľadom na nablýskanú čepeľ každý utrúsil jednu vetu. V poradí títo piati povedali:

1. Ja som ten, kto vie, kde bol drakkar.
2. Ten, kto vie, kde bol drakkar, ešte nebol vypočutý.
3. Ja nie som ten, čo vie, kde bol drakkar.
4. Ten, kto vie, kde bol drakkar, prehovoril ako druhý v poradí.
5. Jeden z prvých dvoch vie, kde sa drakkar našiel.

Až po zistení počtu, koľko z nich klamalo, vedeli piráti s istotou určiť, ktorý chlapec vie, kde bol drakkar. Kto to vie?

Riešenie

Najskôr si zitíme, koľko výrokov by bolo pravdivých, na základe toho, ktorý chlapec vie, kde je drakkar.

- Ak to vie prvý, tak druhý a štvrtý výrok sú klamstvá, teda máme dve lži.
- Ak to vie druhý, tak prvý a druhý výrok sú klamstvá, takže máme opäť dve lži.
- Ak to vie tretí, jediný pravdivý výrok je druhý, teda sú tam štyri lži.
- Ak to vie štvrtý, tak máme tri lži: prvý, štvrtý a piaty výrok.
- Ak to vie piaty, tak máme opäť tri lži, a dokonca rovnaké ako naposledy.

Keďže piráti po dozvedení sa počtu lží, vedeli presne určiť, ktorý chlapec to vie, tak to musel byť ten počet, ktorý sa nám tu vyskytuje len raz. Štyri lži sa nám vyskytujú len raz (zvyšné počty sú po dvakrát), teda to vie tretí chlapec.

Komentár

Mnohí z vás sa nezamerali na to, kto môže mať drakkar, ale koľko môže byť klamárov. Týmto postupom sa samozrejme tiež dalo dopracovať k správnemu výsledku, avšak bol zdĺhavý a veľakrát ste sa v ňom zamotali. Treba si dávať pozor, aby ste pri skúšaní všetkých možností naozaj vyskúšali všetky. Tiež sa možno zamyslieť nad iným postupom, pretože zvyčajne existuje nejaký kratší a prehľadnejší.

2

opravovali **Kristín Mišlanová** a **Filip Csonka**
najkrajšie riešenia: Jakub Mičko

158 riešení

Zadanie

V pretláčacom turnaji sú štyria piráti a každý sa pretláča s každým práve raz. Pirát získa za výhru 3 body, za remízu 1 bod a za prehru 0 bodov. Aký je najmenší počet bodov, ktorý môže mať pirát na konci turnaja, pričom bude mať stále viac bodov ako všetci ostatní piráti? Ukážte, ako vie tento počet bodov získať a nezabudnite odôvodniť, prečo menej bodov už mať určite nemôže.

Riešenie

Turnaja sa zúčastnili 4 piráti a každý hrá proti každému, to znamená, že každý bude hrať 3-krát a dokopy sa odohrá 6 zápasov.
Ak by pirát chcel vyhrať s 0, 1, alebo 2 bodmi, musel by aspoň raz prehrať, a teda pirát, s ktorým prehral, by už mal viac bodov ako on.
Ak by chcel vyhrať s 3 bodmi, máme 2 možnosti. Buď mal 3 remízy, ale vtedy je nutné, aby všetky ostatné zápasy skončili tiež remízou (pretože ak by nejaký zápas skončil výhrou, tak už bude mať aj iný pirát 3 body). Keď však všetky skončia remízou, tak žiaden pirát nevyhrá, lebo každý bude mať rovnako 3 body. Druhá možnosť je, že mal 1 výhru a 2 prehry. To by ale znamenalo, že 2 piráti s ktorými prehral, už majú 3 body, teda rovnako ako on, a tým pádom nemôže byť víťaz.
Pre prehľadnosť si pomenujeme pirátov A, B, C a D. Ak by chcel pirát A vyhrať so 4 bodmi, jediná možnosť je, že má 1 výhru, 1 prehru a 1 remízu. Povedzme, že vyhral nad B, prehral proti C a remizoval s D. Pirát C, proti ktorému prehral, má už 3 body, a teda už nemôže získať žiaden bod. Svoje zvyšné 2 zápasy proti B a D teda musí prehrať. Musí prehrať aj proti pirátovi D, s ktorým pirát A remízoval, a teda pirát D by už mal $1 + 3 = 4$ body, takže pirát A už nemôže byť jednoznačný víťaz.
S 5 bodmi sa už dá vyhrať jednoducho. Víťaz má 1 výhru a 2 remízy, pirát, ktorého porazil, má 1 prehru a 2 remízy a všetky ostatné zápasy dopadli remízou.

Iné riešenie

Na úlohu sa dalo pozrieť aj z iného uhla, konkrétne na celkový súčet bodov v turnaji. Za zápas, ktorý skončí víťazstvom sa rozdajú $3+0 = 3$ body, za zápas ktorý sa skonžil remízou sa rozdajú $1 + 1 = 2$ body.
Keďže zápasov je 6, najmenej sa može rozdať $6 \cdot 2 = 12$ bodov, najviac sa môže rozdať $6 \cdot 3 = 18$ bodov. Jediný spôsob ako rozdať 12 bodov je, že všetky zápasy

dopadnú remízou. V takomto prípade neexistuje víťaz. Jediný spôsob ako rozdať 13 bodov je, že jeden zápas dopadne víťazstvom, všetky ostatné remízou. V takomto prípade má víťaz $3 + 1 + 1 = 5$ bodov.
Ak by bol celkový súčet rozdaných bodov 14 alebo viac, víťaz by musel mať aspoň 5 bodov. Je to preto, lebo ak by mal 4, museli by sme rozdeliť ešte $14 - 4 = 10$ bodov medzi 3 pirátov, teda aspoň jeden by musel mať aspoň 4 body. To znamená, že pirát so 4 bodmi by nemohol byť víťaz.
Najmenší počet bodov, ktorý môže mať víťaz turnaja, je 5.

Komentár

Veľa z vás úspešne zvládlo úlohu či už prvým alebo druhým spôsobom (: Najčastejšou chybou sa opäť raz stala úvaha, že ako dôkaz stačí vypísanie niekoľkých možností, na ktorých to ukážeme. To však body nezvykne prinášať, a teda ak sa už niečo rozhodnete skúšať, tak nezabudnite prejsť určite všetky možnosti.

3 opravovali **Juraj Jursa** a **Samuel Krajči**

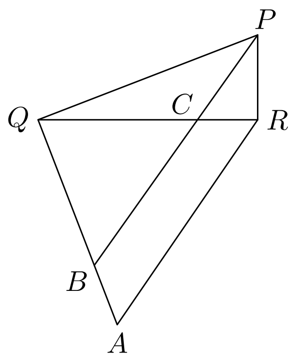
najkrajšie riešenia: Adela Horváthová, Karin Eštoková

95 riešení

Zadanie

Obrazec mal nasledujúci tvar ako na obrázku a Jack, ktorý mal dobré matematické vzdelanie, vedel, že o ňom platí toto: $|QR| = |QA|$, uhly AQP a PRQ sú pravé a PC je os uhla QPR. Ukážte, že úsečka BC je rovnobežná s úsečkou AR a že trojuholník QBC je rovnoramenný.

Riešenie



Zo zadania vieme, že uhly QPB a BPR sú rovnaké (keďže PB je os uhla QPR). Takisto aj uhly PQB a QRP sú rovnaké (oba sú pravé). Teda vidíme, že (keďže súčet uhlov v trojuholníku je 180°) aj zvyšné uhly v trojuholníkoch QBP a RCP, teda uhly QBP a RCP, budú rovnaké. Uhly RCP a QCB sú vrcholové, teda sú tiež rovnaké, takže vieme, že dvojica uhlov QBC a QCB sú rovnaké, a teda trojuholník BCQ je rovnoramenný.
Potom v trojuholníku BCQ vidíme, že uhol QBC je $(180° - \sphericalangle BQC)/2$ a v trojuholníku ABC, ktorý je zo zadania tiež rovnoramenný, je $\sphericalangle QAR = (180° - \sphericalangle BQC)/2$. Teda vidíme, že uhly QBC a QAR sú súhlasné a priamky BC a AR musia byť rovnobežné.

Komentár

Mnohí z Vás dokázali dokázať iba jednu časť úlohy, no nezvládli dostatočne dobre zdôvodniť, prečo z tej prvej vyplýva tá druhá (teda prečo keď sú BC a AR rovnobežné,

tak sú trojuholníky rovnoramenné, alebo naopak, prečo keď sú trojuholníky rovnoramenné, tak sú aj priamky rovnobežné).
Taktiež mnohí z vás, ako to už býva pri geometrických úlohách „zvykom“, riešili úlohu tak, že si ju narysovali a potom odmerali. No takéto riešenie má hneď niekoľko problémov. Jeden z nich je, že popisu obrázka zo zadania zodpovedá mnoho rôznych obrázkov a vy si narysujete iba jeden z nich, teda tých mnoho zvyšných je nevyriešených. Druhý zásadný problém je, že rysovanie a následné meranie je nepresné, nakoľko uhlomerom vieme odmerať uhly a dĺžky prinajlepšom na celé stupne, respektíve milimetre, no uhly a úsečky nemusia mať iba celočíselné veľkosti.

4 opravovali **Žaneta Semanišinová** a **Róbert Sabovčík**

najkrajšie riešenie: Matúš Masrna, Samuel Osuský

122 riešení

Zadanie

Je možné zdolať dvestohlavého draka mečom z kráľovskej zbrojnice, ak ho môžeme použiť nasledovnými tromi spôsobmi? Sekom sa dá naraz odseknúť drakovi 48 hláv, ale 33 nových mu narastie. Šmykom sa dá odťať 21 hláv a žiadna nová nenarastie. Fikom sa odsekne len jedna hlava a ešte narastie 7 nových. Každý manéver sa dá použiť iba vtedy, keď má drak dostatočný počet hláv. Keď drak príde o všetky svoje hlavy, nové mu už nenarastú. Svoje riešenie poriadne odôvodnite.

Riešenie

Keďže rôzne útoky odsekávajú 48, 21 a 1 hlavu a po odťatí všetkých hláv už nová nenarastie, tak sa potrebujeme dostať na počet hláv 48, 21 alebo 1, aby sme draka mohli zabiť.
Teraz sa pozrime na situáciu, keď draka ešte útokom nezabíjame. Vtedy mu odtneme 15 hláv (48 odtneme a 33 nových narastie), alebo 21 hláv (21 odtneme a žiadna nenarastie), alebo mu ich 6 pribudne (1 odtneme a narastie 7 nových).
Ako si môžme všimnúť tak 15, 21 aj 6 (teda čísla, o ktoré meníme počet hláv) sú všetky deliteľné tromi. Teda keď ich budeme odpočítavať (respektíve pripočítavať v prípade použitia fiku) od súčasného počtu drakovych hláv, tak nebudeme meniť zvyšok tohto počtu po delení 3.
Čísla 48, 21 a 1 (teda počty hláv, na ktoré sa musíme dostať, aby sme draka zabili) majú zvyšky po delení tromi postupne 0, 0, 1. Počiatočný počet hláv, teda 200, má zvyšok po delení tromi 2.
Keďže vieme, že ani jedným typom útoku nevieme zmeniť tento zvyšok po delení, tak povolenými manévrami nevieme dostať počty hláv, z ktorých vieme draka zabiť, keďže tie majú iné zvyšky po delení troma ako 200. Draka preto mečom z kráľovskej zbrojnice zabiť nevieme.

Komentár

V úlohách takéhoto typu je vždy náročné nájsť argument, ktorý funguje bez ohľadu na to, aký postup by ste pri odtínaní hláv použili. Pokiaľ sa totiž chcete odvolať na skúšanie možností, museli by ste nie len vyskúšať všetky, ale aj ukázať, že žiadne iné nie sú (čo je v tejto úlohe otrocká práca). Tí z vás, ktorí si všimli deliteľnosť troma, často zabudli na fakt, že ak drakovi odtneme všetky hlavy, nové nenarastú. Tam možnosť použiť fik mení situáciu so zvyškami. Na záver dobrá rada: Netreba zabudnúť na kontrolu svojich výpočtov po riešení, numerické chyby často zavedú do končín, kde sa body nerozdávajú. :)

5

opravovali **Matúš Hlaváčik** a **Mimi Hanus**
najkrajšie riešenia: Ondrej Ovčar

101 riešení

Zadanie

Na poskladanom papieri stálo: Heslo je prirodzené číslo, ktoré neobsahuje nulu. Keď k tomuto heslu pripočítam všetky ďalšie rôzne čísla, ktoré môžu vzniknúť prehádzaním číslic môjho hesla, dostanem 4218. Jack mužom dychtiacim po odpovedi chcel povedať aspoň, aké najmenšie a aké najväčšie číslo mohol kuchár použiť. Aké to boli?

Riešenie

V riešení pod permutáciou budeme rozumieť číslo získané z hesla prehádzaním číslic. Tiež budeme používať zápis $\overline{ab}$, $\overline{abc}$, $\overline{abcd}$, aby sme vyjadrili, že hovoríme o čísle, ktoré má cifry a, b, c alebo d.

Najprv si uvedomme, že heslo nemôže presiahnuť 4218 (nemôže presiahnuť súčet, ktorého je samo jedným zo sčítancov). Z toho plynie, že nemá viac než štyri cifry. Pozrime sa na možnosti, ktoré pre heslo dostávame, pre jednotlivé počty číslic.

Jednociferné heslo by nám dalo súčet nanajvýš 9, čo nedosahuje 4218. Preto tieto čísla nevyhovujú.

Dvojciferné heslo by mohlo mať číslice rovnaké alebo rôzne. Čísla s rovnakými číslicami ($\overline{aa}$) dávajú súčty tvaru $\overline{aa} = 10a + a = 11a$, tie s rôznymi ($\overline{ab}$) dávajú $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11(a + b)$. Teda tieto súčty sú deliteľné 11, čo 4218 nie je. Preto dvojciferné čísla nie sú potenciálnymi heslami. Okrem toho by sme sa na to mohli pozrieť aj z iného uhla – dvojciferné číslo má nanajvýš dve permutácie a tie sú obe (všetka jedna, v prípade, že je len jedna) dvojciferné, čiže ich súčet je maximálne $2 \cdot 99 = 198 < 4218$.

Trojciferné heslo môže mať všetky cifry rovnaké ($\overline{aaa}$), dve rovnaké a jednu odlišnú ($\overline{aab}$, $\overline{aba}$, $\overline{baa}$) alebo všetky navzájom rôzne ($\overline{abc}$). Očividne čísla prvého druhu dávajú súčty nepresahujúce 999 (lebo jediné číslo, ktoré môže poprehádzaním cifier vzniknúť je ono samo) a čísla druhého druhu súčty najviac $998 + 989 + 899 = 2886$, čo zo všetkých robí nevhodných kandidátov. Čísla posledného typu dávajú súčty

v tvare $\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 100a + 10b + c + 100a + 10c + b + 100b + 10a + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b + 100c + 10b + a = 222(a + b + c)$.
Z toho môžeme vyvodiť, že $a+b+c = 4218 : 222 = 19$. Ak tento súčet chceme rozdeliť na tri rôzne cifry tak, aby vzniknuté číslo bolo čo najväčšie, maximalizujeme prvú číslicu (9), potom druhú (8) a tretej zvýši, čo zvýši, čím dostaneme 982. Obdobne najmenším možným heslom je 289.
Štvorciferné heslo so štyrmi rovnakými ciframi ($\overline{aaaa}$), tromi rovnakými a jednou inou ($\overline{aaab}$ a ďalšie tri permutácie), dvomi rovnakými a dvomi odlišnými, navzájom rovnakými ($\overline{aabb}$ a ďalšie dve permutácie), dvomi rovnakými a dvomi inými, navzájom rôznymi ($\overline{aabc}$ a ďalších päť permutácií), respektíve štyrmi rôznymi ($\overline{abcd}$) dáva súčet postupne $1111a$, $1111(3a+b)$, $3333(a+b)$, $3333(2a+b+c)$ respektíve $6666(a+b+c+d)$ (čo môžeme odvodiť podobne ako pri menších počtoch cifier). Všetky tieto súčty sú deliteľné 1111. 4218 nie je. Preto štvorciferné čísla nie sú použiteľné.
Najmenšie číslo, ktoré môže byť heslom je teda 289 a najväčšie zase 982.

Komentár

Táto úloha robila viacerým z vás problém najmä množstvom prípadov, ktoré bolo treba vylúčiť predtým, ako sa človek dostane k samotnému cifernému súčtu. Niektorí vynechali otázku počtu cifier (alebo nejakú jej časť, napríklad nespomenuli násobky 1111), iní zase predpokladali, že heslo má navzájom rôzne cifry. Tu prízvukujme dôležitosť pozorného čítania zadania, ktoré nič také nespomínalo, hoci ste sa na to poniektorí výslovne odvolávali. Po nájdení ciferného súčtu už pre vás bola zvyčajne úloha pomerne jednoduchá a jej na pohľad najdôležitejšiu časť ste zväčša zvládli bez problémov.

6

opravovali **Maťo Vodička** a **Martin Števko**
najkrajšie riešenie: Karin Eštoková, Jakub Mičko

71 riešení

Zadanie

Na začiatku sú na papieri napísané čísla $1, 2, \ldots, n$. V každom ťahu si môžeme vybrať dve ľubovoľné čísla, ktorých aritmetický priemer je celočíselný, preškrtnúť ich a napísať na papier daný priemer. Dokážte, že pre každé $n \geq 3$ vieme postupovať tak, že na konci ostane na papieri len jedno nepreškrtnuté číslo.
(Aritmetický priemer dvoch čísel je ich súčet predelený dvomi.)

Riešenie

Môžeme vyskúšať pár prvých možností a ak sa trocha posnažíme, vždy nám na konci ostane iba jedno číslo. Je zrejmé, že toto číslo sa už šktrnúť nebude dať, keďže z neho nemám s čím urobiť priemer. Pokúsime sa preto nájsť nejaký všeobecný spôsob, ako vyškrtať všetky čísla na papieri.

Pozrime sa teda na pár prvých prípadov pre malé n. Pre $n = 3$ je len jedna možnosť škrtania (vyskúšajte si). Ďalej si môžeme všimnúť, že ak sa v jednom prípade pokúsime šktrtať čísla iným spôsobom, môžeme dostať na konci iné číslo. Napríklad pre $n = 4$:

Krok	**Škrtáme**	**Postupnosť**
0.		1,2,3,4
1.	1,3	2,2,4
2.	2,2	2,4
3.	2,4	3

Krok	**Škrtáme**	**Postupnosť**
0.		1,2,3,4
1.	2,4	1,3,3
3.	3,3	1,3
3.	1,3	2

Skúsme si teda povedať, že z x čísel nám na konci ostane číslo $x - 1$ a pokúsme sa to dokázať. Vidíme, že pre prvé možnosti nám to platí (pre $n = 3$ dostaneme 2, pre $n = 4$ vieme dostať 3,...).

Zároveň si môžeme všimnúť, že pre číslo n vieme postupovať ako pre číslo $n - 1$ s tým, že číslo n ignorujme až do doby, kedy nám ostane zo zvyšných čísel iba jedno. Z nášho predpokladu vyššie vieme, že to bude číslo $n - 2$ (o 1 menšie ako najvyššie číslo ktoré sme zahrnuli do škrtania), a teda na papieri máme čísla $n - 2$ a n. Ich priemer bude

$$\frac{(n-2)+n}{2} = \frac{2 \cdot n - 2}{2} = n - 1.$$

Z n čísel sme dostali iba jedno, a to číslo $n-1$. Čo je to, čo sme chceli. Avšak použili sme v dôkaze predpoklad, že z $n - 1$ čísel nám na konci ostane číslo $n - 2$. Je to ale skutočne problém? Vlastne nie, týmto sme totižto dokázali, že ak niečo platí pre ľubovoľné číslo, platí to aj pre číslo o 1 väčšie. No a my vieme, že to platí pre $n = 3$, takže to bude platiť aj pre $n = 4$, potom $n = 5$, $n = 6$,...Čiže pre všetky čísla.

Komentár

Uvádzame len jedno, avšak existuje mnoho správnych riešení tejto úlohy. Čo sa vašich riešení týka, veľa z vás našlo správny postup, akým môžeme čísla vyškrtať, avšak nedokázali ste poriadne, prečo tento spôsob bude fungovať. Napísať, že zjavne niečo funguje obyčajne nestačí, hlavne keď to má platiť všeobecne, pre všetky čísla. Takisto, keď opisujete postup, tak ukázať, ako funguje na malých prípadoch, a potom dodať, že pre väčšie sa to urobí analogicky, nie je úplne vhodné. Je potrebné niekde napísať všeobecný postup. Nabudúce skúste pri písaní riešení na tieto veci myslieť.

Autori vzorových riešení: Žaneta Semanišinová, Henrieta Micheľová, Roman Staňo, Kristína Mišlanová, Peter Kovács, Jakub Genči

Zadania 2. série úloh zimného semestra

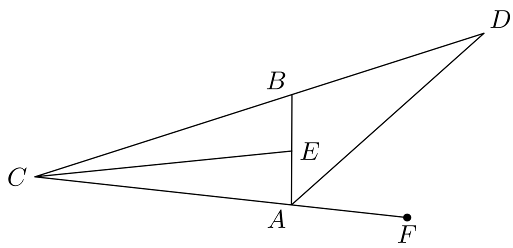
Riešenia pošlite najneskôr do **27. novembra 2017**

Úloha 1

Ukážte, že medzi každou skupinou 8 prirodzených čísel, ktorej súčet je 20, je vždy nejaká skupina čísel, ktorej súčet je 4.

Úloha 2

Problém znel: Na obrázku je trojuholník ABC, v ktorom $|\sphericalangle ABC| = 72°$ a $|\sphericalangle CAB| = 84°$. Bod E leží na úsečke AB tak, že úsečka EC rozdeľuje uhol BCA na dva zhodné. Bod F leží na polpriamke CA za bodom A. Bod D leží na polpriamke CB tak, že DA rozdeľuje uhol BAF na zhodné uhly. Dokážte, že $|AD| = |CE|$.



Úloha 3

Kormidelník si obzeral svoj podiel z najnovšieho lupu. Jeho súčasťou boli aj štyri strieborné mince neznámej meny: jednokoruna, dvojkoruna, trojkoruna a päťkoruna. Kormidelník očakával, že budú vážiť po poradí 1, 2, 3 a 5 gramov. Od svojich druhov sa však dozvedel, že hmotnosť jednej z nich sa o niečo líši od predpokladanej hmotnosti, hoci ostatné zodpovedajú presne. Ako má kormidelník zistiť pomocou rovnoramenných váh bez závaží, ktorá minca nemá predpovedanú hmotnosť? Na miskách váh sa môžu objaviť iba zmienené mince a kormidelník má z každej hodnoty práve jeden spomínaný kus. Do riešenia napíšte postup, ako má kormidelník vážiť, aby to s istotou zistil.

Úloha 4

Súčin piatich prvočísel je šesťciferné číslo v tvare $\overline{ABCABC}$, kde A, B a C sú cifry (napríklad číslo 123123 je v takomto tvare). Zistite hodnotu A, B a C, ak viete, že jedno z týchto piatich prvočísel je 491. Nájdite všetky možnosti a odôvodnite, že iné neexistujú.

Úloha 5

Kapitán a dôstojník hrajú hru na plániku 5×5 (kapitán začína). V ťahoch sa striedajú, pričom kapitán vo svojom ťahu vyfarbí jednotkový štvorček (svojou farbou) a dôstojník vyfarbí 3×1 obdĺžnik (svojou farbou). Už zafarbené políčka sa nedajú farbiť znovu. Hra končí, keď dôstojník už nevie urobiť ťah – zvyšné nevyfarbené políčka vtedy zafarbí kapitán. Vyhráva ten z nich, ktorý má na konci hry viac políčok vyfarbených svojou farbou. Rozhodnite, či existuje pre niektorého z nich výherná stratégia.
(Výhernou stratégiou rozumieme návod, ako má hráč hrať, aby vždy vyhral, nech ten druhý hrá akokoľvek.)

Úloha 6

Šibenica mala pôdorys v tvare lichobežníka $ABCD$ so základňami AB a CD (ktoré sú rovnobežné), pričom uhlopriečky AC a BD sú na seba kolmé. Ďalej uhly BAC a BDC boli zhodné. Aritmetický priemer dĺžok základní lichobežníka bol rovný 8. Aký bol obsah celého lichobežníka $ABCD$?
(Aritmetický priemer dĺžok dvoch strán je ich súčet predelený dvomi.)

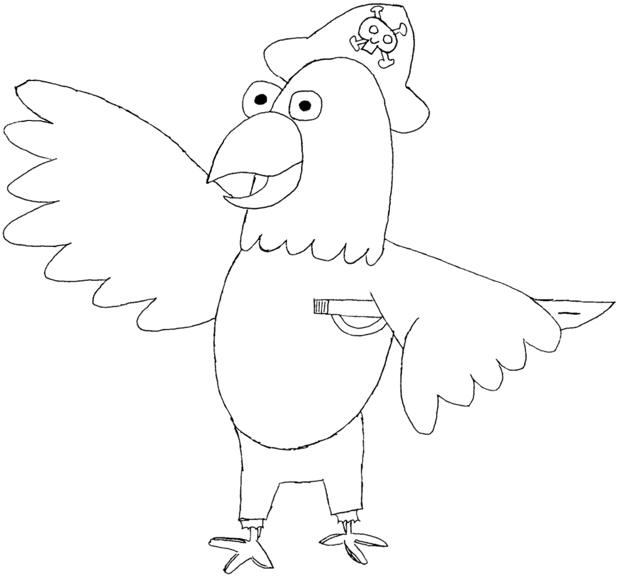
Poradie po 1. sérii zimného semestra

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	PS	CS
1. - 3.	Simona Gibalová	Z9	GAlejKE	9	9	9	9	9	9	0	**54**
	Samuel Osuský	Z7	ZDrJDMA	9	9	9	9	9	9	0	**54**
	Karin Eštoková	Z8	ZBeleKE	9	9	9	9	9	9	0	**54**
4.	Adam Garafa	Z9	ZKro4KE	9	9	9	9	8	9	0	**53**
5.	Sara Gašparová	Z8	GABerSC	9	9	6	9	8	9	0	**52**
6. - 7.	Matúš Masrna	Z9	ZKro4KE	9	9	9	9	9	6	0	**51**
	Sára Šoltészová	Z9	GAlejKE	9	9	9	9	9	6	0	**51**
8. - 9.	Adela Horváthová	Z7	ZDnepKE	7	9	9	3	8	8	0	**50**
	Jakub Komenda	Z7	ZFKraZC	9	-	9	8	6	9	0	**50**
10. - 14.	Radoslav Jochman	Z9	GAlejKE	9	9	9	9	8	5	0	**49**
	Maximilián Pándy	Z9	GZSMaKE	9	9	9	9	4	9	0	**49**
	Matej Šoltés	Z7	GTrebKE	9	9	9	-	8	5	0	**49**
	Lenka Borovská	Z7	GsvESKE	9	9	6	8	6	8	0	**49**
	Samuel Koribanič	Z9	ZJSveHE	9	9	9	9	8	5	0	**49**
15.	Tomáš Gaja	Z7	ZKro4KE	9	9	9	6	6	5	0	**48**
16.	Miriam Horváthová	Z8	ZKomeMI	9	9	5	6	8	9	0	**47**
17. - 19.	Erik Novák	Z9	ZKro4KE	9	9	9	9	8	2	0	**46**
	Matej Kundrík	Z7	ZKro4KE	9	9	9	3	4	6	0	**46**
	Oskar Hritz	Z8	ZPoliKE	8	9	9	6	8	5	0	**46**
20.	Zuzana Kudláčová	Z8	GAlejKE	9	8	9	6	5	7	0	**45**
21. - 22.	Martin Kliment	Z9	GJAKoKE	8	9	6	9	8	4	0	**44**
	Jakub Mičko	Z9	GAlejKE	9	9	-	9	8	9	0	**44**
23. - 25.	Simona Dučaiová	Z9	ZTomaKE	9	9	9	6	4	5	0	**42**
	Filip Baltovič	Z9	GAlejKE	9	6	-	9	9	9	0	**42**
	Eduard Fedorčuk	Z7	GJAKoKE	9	9	0	6	4	5	0	**42**
26.	Ondrej Ovčar	Z9	GAlejKE	9	9	9	-	9	5	0	**41**
27.	Natália Brezinová	Z8	ZBrusKE	9	9	9	7	3	-	0	**40**
28.	Branislav Ječim	Z7	ZOKozSN	9	9	0	6	5	1	0	**39**
29. - 31.	Olívia Jánošíková	Z7	ZKro4KE	9	4	1	6	8	1	0	**37**
	Štefan Vašak	Z8	ZKe30KE	9	9	1	4	5	6	0	**37**
	Martin Kopčány	Z8	GJaChBR	9	9	0	9	8	1	0	**37**
32. - 33.	Adriana Ňaňková	Z7	ZZaVoSL	4	9	7	3	4	1	0	**36**
	Patrik Sremaňák	Z8	ZKro4KE	9	9	9	-	9	-	0	**36**
34.	Eliška Kaločová	Z8	GVarsZA	9	9	6	1	9	-	0	**35**
35. - 38.	Adam Čabrák	Z9	ZKro4KE	9	9	6	5	3	-	0	**32**
	Erik Jochman	Z7	GAlejKE	9	6	1	6	1	1	0	**32**
	Jakub Blišťan	Z7	GAlejKE	9	4	6	1	3	1	0	**32**
	Zoe Kolarčíková	Z7	ZStanKE	9	1	6	6	1	-	0	**32**
39.	Ján Brajerčík	Z7	ZSmerPO	5	9	-	6	0	1	0	**30**
40.	Barbora Baltovičová	Z7	GAlejKE	9	2	-	9	-	-	0	**29**
41.	Samuel Kačenga	Z9	ZOKozSN	2	8	9	2	2	5	0	**28**
42.	Tereza Pažinová	Z7	ZKro4KE	9	9	-	-	-	-	0	**27**
43.	Lucia Simonidesová	Z8	ZBajkBA	0	9	7	3	3	1	0	**24**
44. - 45.	Terézia Stanová	Z7	GJAKoKE	-	-	7	6	3	-	0	**23**
	Ľubomír Vargovčík	Z8	ZKe30KE	0	4	1	6	5	6	0	**23**
46. - 51.	Martin Fedorko	Z9	ZSmerPO	1	7	9	3	2	0	0	**22**
	Adam Harmanský	Z7	ZKro4KE	9	4	-	-	-	-	0	**22**
	Bianka Gurská	Z7	GAlejKE	4	2	0	3	3	5	0	**22**

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	PS	CS
	Petra Suchá	Z8	ZFKraZC	1	2	9	0	3	6	0	**22**
	Patrícia Gondášová	Z7	ZMRSLC	-	2	6	6	2	-	0	**22**
	Oszkár Urbán	Z9	GZSMaKE	9	9	-	-	4	-	0	**22**
52. - 54.	Erika Gregová	Z8	GAlejKE	2	9	0	4	1	4	0	**21**
	Klára Ištoková	Z9	GVMihSD	-	1	8	7	5	-	0	**21**
	Lucia Zajacová	Z8	ZOKozSN	-	8	-	1	4	8	0	**21**
55. - 56.	Viktória Števková	Z7	ZMRSLC	-	2	6	2	4	-	0	**20**
	Štefan Malik	Z8	ZPPGoPO	9	1	9	-	1	-	0	**20**
57. - 65.	Jakub Imrich	Z7	ZKro4KE	-	1	9	-	-	-	0	**19**
	Karol Jakubčák	Z8	ZKro4KE	5	9	5	-	-	0	0	**19**
	Martin Šima	Z7	ZSmerPO	0	9	-	1	-	0	0	**19**
	Katarína Sedláková	Z7	GAlejKE	-	-	6	4	3	-	0	**19**
	Tereza Kostiviarová	Z7	ZTSNPBB	-	-	5	6	2	-	0	**19**
	Lukáš Kacvinský	Z7	ZSmerPO	1	1	5	6	0	0	0	**19**
	Juliána Dovalová	Z8	ZOKozSN	0	4	0	6	4	5	0	**19**
	Nikoleta Javoríková	Z8	ZKomeDK	9	0	6	2	2	0	0	**19**
	Tadeáš Bujdosó	Z7	KSSsMPO	9	1	-	-	-	-	0	**19**
66.	Matúš Bucher	Z9	ZKro4KE	9	9	-	-	-	-	0	**18**
67. - 69.	Tomáš Vysoký	Z7	ZKro4KE	-	7	-	3	-	-	0	**17**
	Alžbeta Klimentová	Z7	ZLNovKE	4	2	0	4	3	-	0	**17**
	Dominik Duša	Z9	ZDoSuca	7	6	4	-	-	-	0	**17**
70. - 71.	Ivan Marianek	Z7	ZPJilZV	5	2	1	3	-	0	0	**16**
	Šimon Kirňák	Z7	ZOKozSN	0	4	-	-	2	5	0	**16**
72. - 76.	Kristína Melicherová	Z7	ZKro4KE	-	1	-	-	7	-	0	**15**
	Margaréta Berecká	Z8	ZKro4KE	2	1	9	-	3	-	0	**15**
	Veronika Nemjová	Z8	GAlejKE	9	-	-	6	-	-	0	**15**
	Barbara Michalíková	Z8	ZKro4KE	5	9	0	1	-	-	0	**15**
	Barbara Birošová	Z8	ZOKozSN	-	8	-	2	-	5	0	**15**
77. - 78.	Matúš Mandzák	Z7	ZKro4KE	-	2	6	-	-	-	0	**14**
	Veronika Cipková	Z6	ZKro4KE	-	-	-	6	2	-	0	**14**
79. - 83.	Richard Gerboc	Z8	ZŠtefHE	0	1	9	2	1	-	0	**13**
	Alena Závodníková	Z7	ZKro4KE	3	5	-	-	-	-	0	**13**
	Boris Pasterňak	Z7	ZKro4KE	-	1	-	6	-	-	0	**13**
	Eva Hricová	Z7	ZMRSLC	-	1	-	6	-	0	0	**13**
	Tomáš Hamrák	Z8	ZOKozSN	1	9	-	1	2	-	0	**13**
84. - 88.	Alexandra Spišáková	Z7	ZStanKE	1	4	-	-	2	1	0	**12**
	Michal Choma	Z8	ZGrunKK	9	1	-	2	-	-	0	**12**
	Andrea Šterovská	Z9	ZGHaiLE	2	2	-	6	2	0	0	**12**
	Martin Paulenda	Z9	ZPJilZV	9	1	1	1	-	-	0	**12**
	Tomáš Selep	Z9	GTVanSL	0	0	6	3	3	-	0	**12**
89.	Pavol Koroľ	Z9	ZŠKom6SV	-	8	-	1	2	-	0	**11**
90. - 91.	Sophia Sabovčíková	Z8	ZKro4KE	2	4	0	3	1	0	0	**10**
	Michaela Balčáková	Z8	KSSsMPO	9	1	0	-	-	-	0	**10**
92. - 96.	Lukáš Mikulec	Z9	GABerSC	1	1	-	3	3	1	0	**9**
	Michal Chovančák	Z8	ZKro4KE	-	0	6	-	3	-	0	**9**
	Patrik Kiss	Z7	GPJSaRV	0	1	-	2	3	-	0	**9**
	Matúš Chovanec	Z9	GTVanSL	0	0	6	1	2	-	0	**9**
	Sebastián Bartko	Z8	ZDruzKE	0	1	0	6	2	-	0	**9**
97.	Martin Bodžoň	Z9	ZGrunKK	0	1	2	5	-	-	0	**8**
98. - 102.	Matúš Vysoký	Z9	ZKro4KE	-	4	-	-	3	-	0	**7**

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	PS	CS
	Ivonne Hančikovská	Z7	ZKro4KE	2	1	-	1	1	-	0	**7**
	Pavol, Alexander Komloš	Z6	ZKro4KE	3	1	-	-	-	-	0	**7**
	Oliver Demjan	Z7	ZKro4KE	0	3	-	1	-	0	0	**7**
	Tomáš Žalobín	Z8	ZDruzKE	0	1	0	6	0	-	0	**7**
103. - 107.	Goran Matejovič	Z7	ZKro4KE	3	0	-	-	-	-	0	**6**
	Dalibor Batěk	Z9	GABerSC	0	4	-	-	2	-	0	**6**
	Peter Rudišin	Z8	ZJSveHE	0	5	0	0	1	0	0	**6**
	Miloš Neuvirth	Z9	ZOKozSN	-	1	-	2	3	-	0	**6**
	Tran Vy	Z7	ZStarKE	3	0	0	0	0	-	0	**6**
108. - 111.	Pavol Liščinský	Z8	ZKro4KE	-	4	-	1	-	-	0	**5**
	Martina Hesková	Z7	ZPJilZV	-	-	2	1	-	-	0	**5**
	Terézia Husovská	Z7	KSSsMPO	1	2	-	-	-	-	0	**5**
	Viktor Barbuščák	Z8	ZOKozSN	-	1	-	3	1	-	0	**5**
112. - 116.	Ema Mišeková	Z9	ZStanKE	0	2	0	-	2	-	0	**4**
	Fabián Novotný	Z8	GZsvMPO	1	1	1	1	-	-	0	**4**
	Daniela Hágovská	Z9	ZOKozSN	0	3	-	1	-	0	0	**4**
	Kristián Böhner	Z8	ZGHaiLE	0	1	-	3	0	-	0	**4**
	Natália Hopponová	Z7	ZStanKE	2	0	-	-	0	0	0	**4**
117. - 128.	Branislav Knap	Z8	ZKro4KE	2	1	-	-	-	-	0	**3**
	Petra Chomová	Z6	ZKro4KE	1	1	-	-	-	-	0	**3**
	Silvia Čobanová	Z7	ZKro4KE	1	1	-	-	-	-	0	**3**
	Tadeáš Kaminský	Z9	GAlejKE	-	2	1	-	-	-	0	**3**
	Richard Sobek	Z8	ZKro4KE	-	1	-	2	-	-	0	**3**
	Tamara Botová	Z8	ZDruzKE	0	1	0	2	-	-	0	**3**
	Eliška Forgáčová	Z7	ZFKraZC	1	1	0	0	0	0	0	**3**
	Adam Kvasňák	Z8	ZOKozSN	2	1	-	-	-	-	0	**3**
	Alena Nemcová	Z8	ZGHaiLE	0	0	-	3	-	-	0	**3**
	Nikolas Rybovič	Z7	ZPlavnica	0	1	0	1	-	0	0	**3**
	Pavol Székely	Z7	ZPlavnica	0	1	-	1	0	-	0	**3**
	Tomáš Hasaj	Z8	ZOKozSN	-	0	-	3	-	0	0	**3**
129. - 144.	Peter Lukáč	Z8	ZKro4KE	1	-	-	1	-	-	0	**2**
	Michal Dvořáček	Z5	ZKro4KE	0	1	-	0	-	0	0	**2**
	Viktor Ružinský	Z7	ZKro4KE	0	0	-	1	-	-	0	**2**
	Juraj Šuhaj	Z5	ZKro4KE	1	-	-	-	-	-	0	**2**
	Maximilian Bak	Z7	ZKro4KE	-	1	-	-	-	-	0	**2**
	Radka Miškovičová	Z7	ZStanKE	-	1	-	-	0	-	0	**2**
	Michael Magyar	Z7	GTrebKE	0	1	-	-	-	-	0	**2**
	Boris Kacvinský	Z7	SMladPP	1	0	-	0	0	-	0	**2**
	Alexandra Mistríková	Z9	ZOKozSN	0	1	-	1	-	0	0	**2**
	Alica Kvasňáková	Z7	ZOKozSN	-	1	-	-	-	-	0	**2**
	Kristína Kriváková	Z9	ZOKozSN	0	1	-	1	-	-	0	**2**
	Nikolas Matyi	Z8	ZJHroRV	0	1	0	1	-	-	0	**2**
	Patrik Dvorský	Z9	ZOKozSN	-	1	-	0	-	1	0	**2**
	Rachel Vysocká	Z8	ZJHroRV	-	1	-	1	-	-	0	**2**
	Šimon Basista	Z7	ZGHaiLE	-	1	-	0	-	-	0	**2**
	Šimon Silicai	Z8	ZJHroRV	0	1	0	1	-	-	0	**2**
145. - 162.	Diana Baňačkai	Z8	ZKro4KE	1	-	-	-	-	-	0	**1**
	Filip Šašala	Z8	ZKro4KE	0	1	-	-	-	-	0	**1**
	Viktória Jančová	Z8	ZKokava	0	1	-	-	-	-	0	**1**
	Patrik Minčík	Z8	ZJHroRV	1	-	-	-	-	-	0	**1**

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	PS	CS
	Adam Harčár	Z9	ZBudimir	-	1	0	-	-	-	0	**1**
	Matej Čorba	Z9	ZBudimir	0	1	0	-	-	-	0	**1**
	Adam Németh	Z8	ZJHroRV	0	1	-	-	-	-	0	**1**
	Adam Vernarský	Z8	ZGHaiLE	-	1	-	0	0	-	0	**1**
	Ema Dvorčáková	Z8	ZGHaiLE	0	1	0	-	-	-	0	**1**
	Jakub Škurla	Z9	ZPJilZV	0	0	0	1	0	0	0	**1**
	Ján Leibiczer	Z8	ZOKozSN	-	1	-	0	-	-	0	**1**
	Júlia Bonková	Z8	ZGHaiLE	-	-	-	1	-	-	0	**1**
	Klára Jurčíková	Z8	ZGHaiLE	0	-	-	1	0	-	0	**1**
	Mandy Richnavská	Z8	ZJHroRV	0	-	0	1	-	-	0	**1**
	Matej Slejzák	Z9	ZGHaiLE	-	1	0	-	0	-	0	**1**
	Pavol Dvorčák	Z8	ZGHaiLE	0	1	-	-	0	-	0	**1**
	Sabina Vencelová	Z9	ZOKozSN	0	-	-	1	-	-	0	**1**
	Tereza Lazarová	Z8	ZGHaiLE	0	0	-	1	-	-	0	**1**
163. - 178.	Viliam Valent	Z7	ZGHaiLE	0	0	-	-	-	-	0	**0**
	Adam Varinský	Z8	ZKro4KE	0	0	-	-	-	-	0	**0**
	Martin Gubik	Z8	ZKro4KE	0	0	-	-	-	-	0	**0**
	Alex Olšavský	Z6	GZsvMPO	-	-	0	-	-	-	0	**0**
	Romana Suchá	Z7	ZStanKE	0	0	0	0	0	0	0	**0**
	Filip Ficka	Z8	ZMRSLC	0	0	0	0	0	0	0	**0**
	Barbora Gbúrová	Z8	ZKro4KE	-	0	0	-	-	-	0	**0**
	Dominika Sedmáková	Z7	ZStanKE	-	0	0	0	0	0	0	**0**
	Alexander Pirší	Z8	ZGHaiLE	0	0	-	0	0	-	0	**0**
	Blanka Michalíková	Z8	ZJHroRV	0	-	-	-	-	-	0	**0**
	Juraj Varecha	Z7	ZGHaiLE	0	-	0	-	-	0	0	**0**
	Karin Kuchtová	Z8	ZJHroRV	0	-	-	-	-	-	0	**0**
	Klára Kereskényiová	Z8	ZJHroRV	0	-	-	-	-	-	0	**0**
	Michaela Maximová	Z7	ZGHaiLE	0	0	-	0	-	-	0	**0**
	Nikolas Šimonič	Z7	ZGHaiLE	0	0	0	0	0	0	0	**0**
	Sára Škovirková	Z7	ZGHaiLE	0	0	-	-	0	-	0	**0**



Názov: *MATIK* – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 2 • November 2017 • Zimný semester 31. ročníka
Internet: `matik.strom.sk`
E-mail: `matik@strom.sk`

Organizátor: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach,
Prírodovedecká fakulta, Šrobárova 2, 041 54 Košice
Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2016-9485/41562:71-10E0.

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM
ĽUDSKÉ ZDROJE

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk