Korešpondenčný Matematický Seminár

MATIK

Číslo **2** — Ročník **29** Internet http://matik.strom.sk

Čaute!

Určite sa tešíte, že nastal ten správny čas a dostali sa k vám opravené riešenia a s nimi aj nový MATIK. Pýtate sa, čo zaujímavé tu nájdete? Predovšetkým poučné vzoráky, príklady 2. série a poradie po 1. sérii. Ak nie ste spokojní so svojím umiestnením, nebuďte smutní. Stále máte šancu to zmeniť. Termín 2. série sa pomaly, ale isto blíži, tak sa s chuťou pustite do rátania (ak ste tak ešte neurobili). Veľa dobrých nápadov pri riešení vám prajú

Vaši vedúci MATIKa

Ako bolo

Výlet Začiatkom októbra sme sa v obrovskom počte vydali na výlet do Čane. Všetko sa ale skomplikovalo už na začiatku, nakoľko sme zabudli vystúpiť v Čani a autobus nás odviezol až do Ždane. Nuž, nič sa nedalo robiť a my sme museli ísť pešo naspäť do Čane. Našťastie sa nám ale podarilo nájsť skratku a na prekvapenie všetkých sme na ceste stretli aj Korytnačky. Nadšenie z nás ale rýchlo opadlo, keď sme sa dozvedeli, že Korytnačky vedia hovoriť iba po maďarsky. Cestu do Čane sme síce ešte stále neprekonali, ale mierne jazykové bariéry áno a dozvedeli sme sa, kde nájdeme Dina Balčáka. Úspešne sme ho vyvolali, tak ako nám kázali Korytnačky, a všetci sme ostali prekvapení, keď sme zistili, že Dino Balčák bol celý ten čas medzi nami. Nakoniec sme na ceste domov predsa dorazili do Čane, ale už bolo veľa hodín, tak sme sa všetci pobrali domov do našich mäkučkých postieľok. Určite však každému vŕta v hlave, čo sa stalo s Dinom Balčákom. Nezúfajte!

Ako bude

Lomihlav Aj tento rok na vás v novembri čaká Lomihlav. Je to súťaž štvorčlenných družstiev žiakov siedmeho až deviateho ročníka alebo sekundy až kvarty, reprezentujúcich svoju školu. Ich úlohou je čo najlepšie vyriešiť 20 matematických úloh, 5 hlavolamov a 5 hádaniek. Tejto súťaže sa pravidelne zúčastňuje vyše stovka žiakov zo základných škôl, najmä z východného Slovenska. Majú šancu sa niečo nové naučiť, porovnať svoje sily s ostatnými a stretnúť kamarátov so záľubou v matematike. Tohto roku sa bude Lomihlav konať v piatok, 27.11.2015, v *CVČ DOMINO na Popradskej 86* v Košiciach. Bližšie informácie o súťaži a jej predchádzajúcich ročníkoch môžete nájsť na `https://matik.strom.sk/sk/lomihlav/`.

Vzorové riešenia 1. série úloh

1 opravovali **Juro Jursa** a **Dano Onduš**
najkrajšie riešenie: Frederik Ténai
84 riešení

Zadanie Na ostrove žijú klamári, poctivci a normálni ľudia. Klamári vždy klamú, poctivci vravia vždy pravdu a normálni ľudia niekedy vravia pravdu a niekedy klamú. Uzavrieť manželstvo môžu len dvaja normálni ľudia alebo klamár a poctivec. Ľudia z manželských párov A a B o sebe povedali:

Pán A: Pán B je poctivec.

Pani A: Manžel má pravdu, pán B je poctivec.

Pani B: Naozaj, môj muž je poctivec.

Určte, čo je každý z nich.

Vzorové riešenie

V prvom rade si treba v tejto úlohe uvedomiť, že obidvaja z páru A tvrdia to isté. Ak sa pozrieme na možné manželské zväzky, tak môžu byť buď klamár a poctivec, alebo dvaja normálni ľudia. No ak obaja tvrdia to isté, tak nemôže jeden klamať a druhý hovoriť pravdu. To znamená, že obaja sú normálni, aj keď ešte nevieme povedať, či obaja klamú, alebo hovoria pravdu.

Teraz sa pozrime na pár B. Pani B hovorí, že jej manžel je poctivec. Ak bude hovoriť pravdu, znamenalo by to, že pán B je poctivec a pani B je normálna alebo poctivá žena. Tu vidíme, že to kvôli manželským pravidlám nemôže byť pravda.

Ak pani B klame, znamená to, že pán B môže byť buď klamár, alebo normálny človek, a to isté platí o pani B. Opätovne, kvôli manželským pravidlám, môžeme vybrať len jednu možnosť, a to, že obaja sú normálni ľudia.

Komentár Výsledok mali takmer všetci dobre, no veľa z vás si neuvedomilo, že negácia výroku „on je poctivec“ nie je „on je klamár“ , ale „on nie je poctivec“ , čo znamená, že môže byť aj klamár, aj normálny človek. A zároveň, ak človek klame, nemusí byť automaticky klamár, alebo poctivec, ak vraví pravdu.

Toto je síce matematický seminár, ale je super, ak to napíšete aj gramaticky správne, takže nabudúce „normálni ľudia“ ;).

2 opravovali **Vraťo Madáč**, **Kristín Mišlanová** a **Henka Micheľová**

najkrajšie riešenie: Klára Hricová

67 riešení

Zadanie Počet pichliačov, čo Jožkovi narástli, je prirodzené číslo menšie ako 50 000. Prvý okoloidúci prehlásil, že to číslo je deliteľné dvomi. Druhý, že to číslo je deliteľné tromi. Takto to pokračovalo, až dvanásty okoloidúci prehlásil, že to číslo je deliteľné trinástimi. Všetky tieto tvrdenia, okrem dvoch okoloidúcich, čo hovorili za sebou, boli pravdivé. Koľko pichliačov Jožkovi narástlo?

Vzorové riešenie

Najprv si musíme uvedomiť, že hľadáme číslo, ktoré je deliteľné číslami od 2 do 13, okrem dvoch po sebe idúcich čísel. Zároveň je menšie ako 50000. Tu sa musíme pozrieť na to, ktorými číslami určite musí byť deliteľné:

– Číslom 2 sú deliteľné všetky párne čísla, teda ak by naše číslo nebolo deliteľné 2, tak by nebolo deliteľné ani číslami 4, 6, 8, 10, 12. Tieto čísla však nesusedia a je ich priveľa, teda naše číslo musí byť deliteľné číslom 2.

– Číslom 3 sú zase deliteľné aj čísla 6, 9 a 12, tu je to rovnaké ako pri 2, čísla nesusedia a je ich priveľa, teda aj číslo 3 musí byť deliteľom hľadaného počtu pichliačov.

– Číslom 5 je zase deliteľné číslo 10, rovnaký argument ako pri 2 a 3, čísla sú síce len dve, no nesusedia, a teda aj 5 musí byť deliteľom nášho čísla.

– Číslo 4 už nemá suseda, s ktorým by neboli deliteľmi (už vieme, že čísla 3 a 5 sú určite deliteľmi) a teda aj 4 určite musí byť deliteľom nášho čísla.

– Keďže naše číslo je deliteľné 2 aj 3, tak musí určite byť deliteľné aj 6.

– Keďže naše číslo je deliteľné 2 aj 5, tak musí určite byť deliteľné aj 10.

– Keďže naše číslo je deliteľné 3 aj 4, tak musí určíte byť deliteľné aj 12. V posledných troch možnostiach sme použili kritériá deliteľnosti.

– Keďže vieme, že deliteľmi nášho čísla sú 10 aj 12, tak 11 a 13 neostal žiadny sused, s ktorým by nedelili naše číslo, a teda 11 a 13 budú jeho deliteľmi.

– Ostali čísla 7, 8, 9. Keďže to musia byť susedia, tak vieme prehlásiť, že číslo 8 určite nedelí naše číslo. Ostali 7 a 9 (dvojica s nimi bude číslo 8). Vyskúšame teda obe možnosti a zistíme najmenší spoločný násobok:

Máme dve možnosti:

• Naše hľadané číslo nebude deliteľné 8 a 9:
Počet pichliačov bude rovný najmenšiemu spoločnému násobku zvyšných čísel, ktorými bude deliteľný, teda 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12 a 13.
To je rovné $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 60060$ – čo je ale väčšie ako 50 000, teda nevyhovuje.

• Naše hľadané číslo nebude deliteľné 7 a 8:
Počet pichliačov bude rovný najmenšiemu spoločnému násobku zvyšných čísel, ktorými bude deliteľný, teda 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12 a 13.
To je rovné $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 = 25740$ – čo je náš hľadaný výsledok.

Jožkovi narástlo 25 740 pichliačov.

Komentár Na správny výsledok ste prišli skoro všetci. Chyby ste často robili v tom, že keď ste si vybrali vypisovanie možností, tak ste nejakú možnosť neodôvodnili dobre, alebo ste odôvodnenie nedotiahli do konca, alebo ste nejakú možnosť vynechali. Následne sa niektorým nepodarilo nájsť a vyskúšať možnosť 8, 9.

3 opravovali **Viki Brezinová** a **Peťo Kovács**

najkrajšie riešenie: Ajša Faguľová, Robo Sabovčík, Braňo Pastula

73 riešení

Zadanie Číňan si našiel lukratívnu prácu, kde ho vyplatia za každý deň sumou rovnou počtu dní, koľko v práci pracuje. Teda prvý deň dostane 1, druhý deň 2, tretí deň 3 peniaze… Keďže je dobrá duša a vie, že to je lukratívna ponuka, tak sa rozhodol, že si spraví denníček, kde si stále zapíše počet peňazí, ktoré zarobil, a bude ich aj každý deň sčítavať (vyzerá to asi takto – deň 1: 1=1, deň 2: 1+2=3, deň 3: 3+3=6, deň 4: 6+4=10…).
Navyše, stále, keď suma, ktorú dovtedy (vrátane toho dňa) zarobil, bude deliteľná 3, tak daruje charite časť zárobkov. A to tak, že keď sa to stane prvýkrát, tak daruje 1 peniaz, keď sa to stane druhýkrát, tak daruje 2 peniaze, keď tretíkrát tak 3 peniaze… Vypočítajte, koľko daroval charite, aké mal posledné zapísané číslo v denníčku za celkový výnos z jeho práce (z toho denníčka si neodčítava darované peniaze) a koľko má peňazí po:
a) 10. odpracovanom dni
b) 1000. odpracovanom dni
Riešenie zdôvodnite.

Vzorové riešenie

Úlohu budeme najprv riešiť všeobecne, a potom pre konkrétny počet dní.
Najprv vypočítame, aké mal posledné zapísané číslo v denníčku za celkový výnos z práce po x-tom dni. Každý deň zarobí sumu, ktorá je rovná poradovému číslu dňa. Čiže za x dní zarobí $1 + 2 + 3 + \ldots + x$ peňazí. Chceme sčítať prirodzené čísla od 1 do x. Čísla si môžeme popárovať takto: prvé s posledným, druhé s predposledným, a tak ďalej. Takéto páry budú mať rovnaký súčet, keďže prvý sčítanec sa stále zväčšuje o 1 a druhý sčítanec sa stále zmenšuje o 1. Hodnota súčtu jedného páru je $1 + x$. Ak je x párne, každé číslo má pár. Tých párov tam je $x/2$. Takže súčet čísel je $(1 + x)x/2$. Ak je x nepárne, párov je len $(x - 1)/2$ a zostane nám prostredné číslo $(x + 1)/2$. Takže súčet čísel je

$$(x+1)\frac{(x-1)}{2} + \frac{(x+1)}{2} = \frac{(x+1)x}{2}$$

Vidíme, že nezáleží na tom, či je x párne alebo nepárne, na výpočet môžeme použiť stále ten istý vzorec.
Teraz zistíme, kedy bude suma, ktorú dovtedy zarobil, deliteľná 3. Dá sa to viacerými spôsobmi:

1. spôsob:
Chceme zistiť, kedy je súčet po sebe idúcich prirodzených čísel deliteľný 3. Vieme, že súčet troch po sebe idúcich čísel je deliteľný 3, pretože $(a-1)+a+(a+1) = 3a$.

• Ak je x deliteľné 3, tak súčet $1 + 2 + 3 + \ldots + x$ je deliteľný troma. (Sčítance si vieme bezo zvyšku rozdeliť na trojice troch po sebe idúcich čísel. Súčet každej trojice bude deliteľný 3, preto aj výsledný súčet bude deliteľný 3.)

• Ak má x po delení 3 zvyšok 1, $x = 3k + 1$. Máme súčet $1 + 2 + 3 + \ldots + (3k) + (3k + 1)$. Sčítance si znova vieme rozdeliť na trojice troch po sebe idúcich čísel, ale zvýši sa nám $3k + 1$. Vieme, že súčet všetkých trojíc je deliteľný troma, $3k$ je deliteľné 3 a zostala nám 1. Teda tento súčet bude mať zvyšok 1 po delení 3.

• Ak má x po delení 3 zvyšok 2, $x = 3k + 2$. Máme súčet $1 + 2 + 3 + \ldots + 3k + (3k + 1) + (3k + 2)$. Sčítance si znova vieme rozdeliť na trojice troch po sebe idúcich čísel, ale zvýši sa nám $(3k + 1) + (3k + 2) = 6k + 3$, čo je deliteľné 3.
Čiže ak x je deliteľné 3 alebo má zvyšok 2 po delení 3, tak súčet po sebe idúcich čísel je deliteľný 3. V každej trojici troch po sebe idúcich dní daroval na charitu práve 2-krát.

2. spôsob:
Vieme, že súčet $1 + 2 + 3 + \ldots + x$ vieme zapísať aj takto: $(x + 1)x/2$. $(x + 1)x$ je súčin dvoch po sebe idúcich čísel, čiže jedno z nich musí byť párne, takže aj súčin je párny, preto po vydelení 2 dostaneme vždy celé číslo. Výsledok bude deliteľný 3 práve vtedy, ak aspoň jeden činiteľ bude deliteľný 3. Číslo x môže mať po delení 3 zvyšky 0, 1 a 2. Rozoberieme si všetky možnosti:

• Ak je x deliteľné 3, $x = 3k$. Dosadíme do vzorca:

$$\frac{3k(3k + 1)}{2}.$$

$3k$ je deliteľné 3, takže aj výsledok je deliteľný 3.

• Ak má x zvyšok 1 po delení 3, $x = 3k + 1$. Dosadíme do vzorca:

$$\frac{(3k + 1 + 1)(3k + 1)}{2}.$$

Prvý činiteľ má zvyšok 2 po delení 3, druhý činiteľ má zvyšok 1 po delení 3. Keďže ani jeden z činiteľov nie je deliteľný 3, ani výsledok nebude deliteľný 3.

• Ak má x zvyšok 2 po delení 3, $x = 3k + 2$. Dosadíme do vzorca:

$$\frac{(3k + 2 + 1)(3k + 2)}{2} = \frac{(3k + 3)(3k + 2)}{2}.$$

$3k + 3$ je deliteľné 3, takže celý výsledok je deliteľný 3. Čiže ak x je deliteľné 3 alebo má zvyšok 2 po delení 3, tak súčet po sebe idúcich čísel je deliteľný 3.
V každej trojici troch po sebe idúcich dní daroval na charitu práve 2-krát. Keď sme to vyriešili všeobecne, dopočítame to pre konkrétne čísla v zadaní.

a) 10 dní
Posledné zapísané číslo v denníčku:

$$\frac{(x+1)x}{2} = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55.$$

Na charitu daroval:
V 10. deň nedaroval, lebo 10 má zvyšok 1 po delení 3, počas prvých 9 dní daroval v každej trojici troch po sebe idúcich dní práve 2-krát, čiže v 2/3 zo všetkých dní. 9.2/3=6. Počas 10 dní daroval 6-krát. Stále daroval o 1 peniaz viac, čiže nám treba sčítať čísla od 1 po 6, na čo môžeme použiť vzorec: $7 \cdot 6/2 = 21$.
Má $55 - 21 = 34$ peňazí.

b) 1000 dní
Budeme postupovať rovnako ako v *a)*. Posledné zapísané číslo v denníčku je 500 500. Na charitu dal 222 111 a zostalu mu 278 389 peňazí.

Komentár Väčšina z vás sa dopracovala k správneho výsledku, no mnohokrát v riešeniach chýbal dôkaz toho, prečo práve 2/3 zo všetkých dní budú deliteľné 3. Tí z vás, ktorí to nedokázali, vychádzali z toho, že si vypísali prvých 10 dní z tabuľky a v nej si to všimli. Vypísať si niečo nám môže pomôcť sa inšpirovať k riešeniu, no nestačí ako dôkaz.

4 opravovali **Samo Krajči** a **Žanetka Semanišinová**

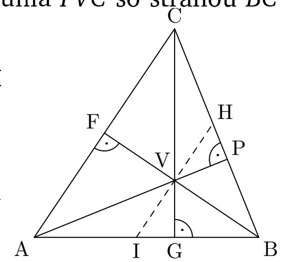
najkrajšie riešenie: Samuel Koribanič

65 riešení

Zadanie V ostrouhlom trojuholníku *ABC* s uhlom *ABC* veľkosti 68 stupňov je *V* priesečník jeho výšok a *P* päta výšky na stranu *BC*. Os uhla *PVC* je rovnobežná so stranou *AC*. Vypočítajte veľkosti uhlov *ACB* a *CAB*.

Vzorové riešenie

Označme pätu výšky na stranu *AB* ako *G*, priesečník osi uhla *PVC* so stranou *BC* ako *H* a jej priesečník so stranou *AB* ako *I*.



Zo zadania vyplýva, že uhly *PVH* a *HVC* sú rovnaké. A keďže uhly *HVC* a *GVI* sú vrcholové, tak aj uhly *GVI* a *PVH* sú rovnaké.
O trojuholníkoch *VPH* a *VGI* vieme, že majú dve dvojice uhlov rovnaké (uhly *GVI* a *PVH* sú rovnaké, ako sme si ukázali, a uhly *VGI* a *VPH* sú pravé, čo vieme zo zadania). Zo súčtu uhlov v trojuholníku teda vieme, že aj tretí uhol budú mať rovnaký, teda aj uhly *VIG* a *VHP* sú rovnaké.
Z rovnobežnosti osi uhla *PVC* so stranou *AC* vieme, že uhly *CAB* a *ACB* sú súhlasné s uhlami *VIG* a *VHP* (o ktorých vieme, že sú rovnaké), takže aj uhly *CAB* a *ACB* sú rovnaké. Z toho vieme povedať, že trojuholník *ABC* je rovnoramenný. Takže keď vieme, že uhol *ABC* má 68°, tak uhly *CAB* a *ACB* budú mať $(180° - 68°)/2 = 56°$.

Komentár Úloha pre vás bola pomerne jednoduchá, o čom svedčí aj vysoký počet 9-bodových riešení, nehovoriac o správnych výsledkoch. Čo je však dôležité, je naučiť sa na tejto úlohe, ako má dobré, prehľadné a jednoduché riešenie vyzerať, pretože inak sa pri ťažších úlohách stratíte. Predovšetkým, je základom nakresliť si dobrý obrázok, dávať pozor na to, ako som označil body a uhly (a to označenie naozaj používať) a vedieť zdôvodniť čo najjednoduchšie svoje riešenie. Väčšina z vás totiž nevyužila mnohé veci, na ktoré ste prišli, a tie by vám zjednodušili úlohu. Pre tých z vás je tu vzorák, aby ste sa z neho poučili.

5

opravovali **Erik Berta** a **Matúš Hlaváčik**

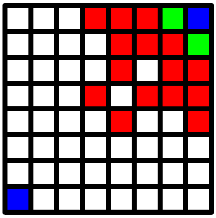
najkrajšie riešenia: Lenka Hake, Michal Masrna

50 riešení

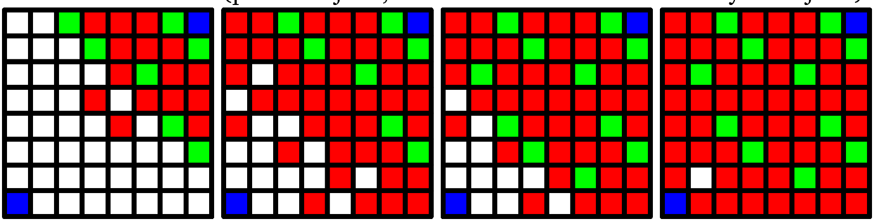
Zadanie Máme šachovnicu 8×8. Do ľavého dolného rohu umiestnime figúrku. Hráč, ktorý je na ťahu, ňou môže posunúť o 1, 2 alebo 3 políčka smerom hore, doprava alebo po uhlopriečke (ako strelec podľa klasických pravidiel šachu) v smere hore-doprava. Ten, kto musí potiahnuť do pravého horného rohu, prehráva. Pre ktorého hráča existuje vyhrávajúca stratégia? Nájdite ju a vysvetlite, prečo vždy funguje.

Vzorové riešenie

Šachovnicu si budeme označovať na pre nás výherné (zelené) a prehrávajúce (červené) polia. Prehrávajúce polia sú tie, z ktorých sa vždy dá potiahnuť na výherné. Sú vzdialené 1, 2 alebo 3 polia od výherného diagonálne, horizontálne alebo vertikálne. Výherné polia sú tie, z ktorých sa dá potiahnuť iba na prehrávajúce alebo posledné, čiže ak na nich skončím svoj ťah, vyhral som.



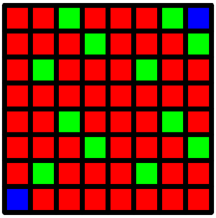
Začneme označením políčok, kde začíname a kde sa hra končí. Pokračujeme políčkami hneď vedľa posledného (pravý horný roh), tie budú zelené, pretože ak ukončíme svoj ťah na týchto poliach, súper bude musieť potiahnuť na posledné pole. Všetky polia, z ktorých sa dostaneme na zelené (vyhrávajúce), si označíme červenou (prehrávajúce, lebo sa z nich dá dostať na vyhrávajúce).



Zopakujeme predchádzajúci krok a ostane nám posledné neoznačené políčko, z ktorého sa dá dostať iba na červené polia. Na toto pole sa ako začínajúci hráč vždy viem dostať ťahom o 1 políčko v diagonálnom smere a odteraz sa súper bude môcť pohybovať iba po červených a ja budem vždy vedieť potiahnuť na zelené. Víťazom je prvý hráč.

Stratégia je teda potiahnuť o 1 políčko diagonálne a potom na základe súperovho ťahu sa pohybovať po zelených poliach. Z nich sa súper bude vedieť dostať iba na červené až napokon sa bude musieť posunúť na posledné pole.

Komentár

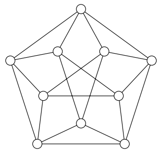


Mnohí z vás prišli na správnu stratégiu, no tak isto mnohí z vás to nedokázali dotiahnuť do konca. Našli ste tie „výherné políčka" , ktoré boli blízko konca, ale často ste nevedeli, ako ďalej. Dúfam, že po prečítaní tohto vzoráku už budete všetci vedieť, ako na takéto úlohy. Okrem toho by som sa vám chcel len trošku posťažovať (ja Matúš), lebo ja som zvyknutý, že políčko sa nazýva „víťazné" vtedy, ak platí, že ak na ňom stojím, tak vyhrávam. Čo je presne naopak, ako ste to nazvali vy (vzorák je písaný pre vás, takže po vašom ;-)).

6 opravovali **Martin Števko** a **Maťo Vodička**

najkrajšie riešenie: Lenka Hake

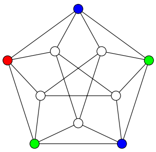
79 riešení



Zadanie Vzor na oku vyzeral ako na obrázku, v mieste niektorých spojov bol farebný krúžok. Všetky krúžky, ktoré sa na vzore nachádzali, sú vyznačené na obrázku. Krúžky boli rôznych farieb, susedné (to sú tie, ktoré sú na obrázku spojené úsečkou) neboli nikdy rovnakej farby. Zisti, najmenej koľko farieb treba použiť, aby žiadne dva susedné krúžky nemali rovnakú farbu.

Vzorové riešenie

Obrázok si skúsime ofarbiť čo najmenej farbami, a zistíme, že na to potrebujeme 4 farby. Úlohu si teda rozdelíme na 2 časti. Prvou bude dokázať, že s troma farbami sa to ofarbiť nedá (čím vlastne dokážeme, že sa to nedá ani na menej farieb). Druhou časťou bude dokázať, že 4 farbami sa to ofarbiť dá.



Využijeme útvary, ktoré sa vo vzore nachádzajú. Na obvode vidíme päťuholník. Pozrime sa teraz na to, koľkými spôsobmi sa tento päťuholník dá ofarbiť. Ak by sme ho chceli ofarbiť 2 farbami, tak použitím Dirichletovho princípu (teda spôsobu, ako zistiť napr. koľko krát budem musieť určite použiť aspoň 1 farbu na zafarbenie niekoľkých bodov, ráta sa ako počet bodov vydelený počtom farieb zaokrúhlený nahor) dostávame, že jednu farbu musíme použiť aspoň 3 krát. To sa ale nedá (aby bola splnená podmienka zo zadania), keďže zafarbením prvého bodu nám ostanú už iba jeho 2 protiľahlé body, ktoré môžeme zafarbiť, no to sú susedné body, z ktorých keď jeden zafarbíme, druhý už nebudeme môcť zafarbiť tou istou farbou. Ak chceme na ofarbenie päťuholníka použiť 3 farby, tak máme len 2 možnosti. Pri prvej zafarbíme 3 body farbou 1, jeden bod farbou 2 a jeden bod farbou 3, no to sa nedá, lebo už skôr sme dokázali, že na zafarbenie päťuholníka nemôžeme použiť jednu farbu 3-krát.

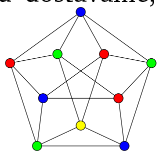
Ostala nám preto iba jedna možnosť, a to ofarbiť jednou farbou 2 body, druhou tiež a treťou 1 bod (ako na obrázku). Budeme predpokladať, že troma farbami sa to dá ofarbiť.

V trojuholníku musíme použiť 3 rôzne farby, lebo každý bod je spojený s dvoma ďalšími, ktoré sú tiež prepojené, takže po jednoduchom dofarbení zistíme, že dolný a pravý horný bod vo vnútornej hviezdici majú rovnakú farbu a zároveň sú spojené úsečkou, čo vyvracia náš prvý predpoklad, že troma farbami sa to zafarbiť dá (použili sme tzv. dôkaz sporom).

Dokázali sme, že 3 farby na ofarbenie vzoru nestačia. Teraz dokážeme, že 4 farbami to ide, a to napríklad obrázkom (na boku druhého riešenia). Žiadne dva body rovnakej farby sa nedotýkajú, a teda na ofarbenie vzoru musíme použiť najmenej 4 farby.

Iné riešenie:

Rovnako ako prvé riešenie, aj toto bude pozostávať z dvoch častí: dôkaz, že 3 farbami sa to nedá a 4 dá. Na vzore máme 10 bodov. Znova budeme predpokladať, že sa vzor dá zafarbiť 3 farbami. Použitím Dirichletovho princípu dostávame, že jednu farbu budeme musieť použiť aspoň 4-krát.



Body na vzore si teraz rozdelím na vnútorné (vrcholy vnútornej hviezdice) a vonkajšie (body na vonkajšom päťuholníku).

Čo sa týka vonkajších bodov, môžeme tam použiť 1 farbu maximálne 2-krát, lebo zafarbením prvého bodu nám ostanú už iba jeho 2 protiľahlé body, ktoré môžeme zafarbiť, no to sú susedné body, a ak jeden z nich ofarbíme, tak ten druhý už nebudeme môcť zafarbiť touto farbou.

Vnútorné body tiež nemôžeme ofarbiť tak, aby sme jednu farbu použili 3-krát, lebo ak zafarbíme prvý bod, tou istou farbou môžeme zafarbiť už iba jeho dva susedné body, no tie sú tiež spojené úsečkou, takže vlastne iba jeden z nich.

Na to, aby sme body vedeli ofarbiť tromi farbami teda musíme jednou farbou ofarbiť 2 vnútorné a 2 vonkajšie body. Keďže útvar je symetrický, máme iba jednu možnosť na to, ako ofarbiť vonkajšie body touto farbou, pretože ak zafarbíme prvý, ostanú iba jeho dva protiľahlé body, ktoré touto farbou ofarbiť môžem, a jedna táto možnosť bude vlastne pootočením druhej (resp. zrkadlovým obrazom).

Zo vzoru ale vidíme, že môžeme ofarbiť už iba jeden vnútorný bod, keďže ostatné sú spojené s už zafarbenými. Vzor sa teda tromi farbami zafarbiť nedá a musíme použiť minimálne 4 farby. Ako dôkaz, že toľko stačí, použijeme obrázok, kde to tak zafarbené bude.

Komentár Úlohu ste riešili prevažne tromi spôsobmi, dva z nich sú uvedené tu a tretí spôsob bol systematické skúšanie. Najčastejšou chybou bolo zabudnutie na nejakú možnosť alebo dokonca na celú skupinu možností (teda rozobrali ste len 1 vetvu namiesto dvoch). Ďalšou častou chybou bolo, že ste zabúdali na to, ako sa táto úloha má riešiť, teda dokázať, že na počet farieb, ktorý tvrdíte vy, sa to dá (stačí aj obrázkom), a dokázať, že na menej farieb sa to nedá.

Zadania 2. série úloh

Úlohy pošlite najneskôr **23. novembra 2015**

Tieto úlohy nájdete aj na stránke `https://matik.strom.sk/sk/sutaze/season/latest/`, alebo aj s príbehom v minulom čísle časopisu (aktuálne aj staršie čísla časopisu nájdete na `https://matik.strom.sk/sk/casopisy/`).

Úloha 1. *Potrebujem napojiť 6 rôznych korytnačiek. Jednotlivé korytnačky sú rôznej veľkosti, a preto potrebujú tieto dávky vody: 1 dl, 2 dl, 3 dl, 4 dl, 5 dl, 6 dl. Mám doma 21 dl vody vo veľkej nádobe a dve odmerky, jednu na 5 dl, druhú na 12 dl. Ako pomocou odmeriek môžem rozdeliť korytnačkám potrebné množstvo vody?*

Úloha 2. *Päť korytnačiek (1, 2, 3, 4 a 5) čaká na svoj ortieľ. Budú sa totiž variť v práve dvoch várkach. Rozhodnutie bolo nasledovné:*
A) aspoň jedna z korytnačiek 1 a 3 sa bude variť v druhej várke,
B) korytnačky 2 a 5 sa budú variť v rôznych várkach,
C) korytnačky 2 a 3 sa budú variť v tej istej várke,
D) práve jedna z korytnačiek 3 a 4 sa bude variť v prvej várke,
E) najviac jedna z korytnačiek 1 a 5 sa bude variť v prvej várke.
Ako môžeme rozdeliť korytnačky do dvoch várok? Nájdite všetky možnosti.

Úloha 3. *Jeden hrniec mal tvar pravidelného šesťuholníka (nazvime ho $ABCDEF$) a druhý hrniec má rovnako šesťuholníkový pôdorys, no bol asi taký veľký, akoby sme stredy strán šesťuholníka $ABCDEF$ označili postupne K, L, M, N, O, P a pospájali ich v tomto poradí. Aký je pomer obsahov šesťuholníkov $ABCDEF$ a $KLMNOP$?*

Úloha 4. *Prirodzené čísla chcú, aby Jožko dokázal, že súčin dvoch dvojciferných prirodzených čísel nemôže byť nikdy štvorciferné číslo, ktoré má všetky štyri cifry rovnaké. Navyše má nájsť všetky dvojice prirodzených čísel, ktorých súčin je štvorciferné číslo so štyroma rovnakými ciframi. Pomôžte mu s tým.*

Úloha 5. *Koľko prirodzených čísel n menších ako 2015 má vlastnosť, že*

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{n}$$

sa dá zjednodušiť na zlomok s menovateľom menším ako n? Pod pojmom zlomok v tejto úlohe rozumieme podiel dvoch prirodzených čísel.

Úloha 6. *Zahrajú si spolu dve partie. Gandulf nakreslil na papier najprv 9 (na prvú partiu) a potom 10 bodov (na druhú partiu). Jožko a Gandulf na striedačku spájajú úsečkami body (vytvárajú medzi dvoma bodmi cestu – ak sa dve cesty pretínajú, tak sa tam vytvára most, nedá sa tam meniť smer). Vyhráva hráč, po ktorého ťahu vedie od každého bodu ku každému bodu cesta (nie nutne priamo). Pre ktorého hráča (prvého alebo druhého?) a kedy existuje víťazná stratégia? Vysvetlite aká. Čo keby bolo bodov 247?*

Poradie po 1.sérii

PS je súčet bodov za predchádzajúce série, **1–6** sú body za jednotlivé úlohy a **CS** je celkový súčet bodov.

Poradie	Meno	Trieda	PS	1	2	3	4	5	6	CS
1.	Michal Masrna	9.B	0	9	9	9	9	9	9	**54**
2. – 3.	Matej Hanus	9.A	0	9	9	9	8	9	9	**53**
	Róbert Sabovčík	9.A	0	8	9	9	9	9	9	**53**
4.	Frederik Ténai	8.B	0	9	8	9	9	-	9	**52**
5. – 6.	Matúš Masrna	7.A	0	9	5	8	9	8	8	**51**
	Patrik Paľovčík	9.A	0	7	9	8	9	9	9	**51**
7. – 8.	Simona Jacková	7.A	0	9	9	5	9	9	3	**50**
	Norbert Micheľ	8.A	0	9	9	7	7	9	9	**50**
9. – 10.	Maximilián Pándy	7.	0	9	8	2	9	9	5	**49**
	Matej Štencel	8.A	0	9	9	8	9	7	7	**49**
11.	Jakub Farbula	Tercia B	0	9	9	7	8	5	8	**48**
12. – 14.	Lenka Hake	Tercia B	0	9	5	5	9	9	9	**46**
	Klára Hricová	8.A	0	9	9	5	9	2	9	**46**
	Benjamín Mravec	9.B	0	8	8	5	9	7	9	**46**
15. – 16.	Andrea Faguľová	9.A	0	9	9	9	9	-	9	**45**
	Branislav Pastula	9.C	0	9	9	9	9	0	9	**45**
17. – 21.	Nina Mizeráková	3.A	0	7	9	5	9	9	4	**44**
	Samuel Elischer	7.B	0	9	2	5	9	9	3	**44**
	Radovan Lascsák	9.B	0	9	9	5	6	9	6	**44**
	Lujza Milotová	8.A	0	8	9	5	8	1	9	**44**
	Michaela Rusnáková	Tercia A	0	9	9	5	9	5	7	**44**
22. – 23.	Tomáš Chovančák	9.B	0	9	6	2	8	9	8	**42**
	Simona Gibalová	Sekunda B	0	9	6	4	9	2	5	**42**
24.	Filip Baltovič	Sekunda B	0	9	7	-	-	7	9	**41**
25. – 27.	Adam Garafa	7.A	0	8	0	5	4	7	7	**39**
	Samuel Koribanič	7.A	0	3	9	5	9	1	4	**39**
	Dominika Nguyen	Tercia B	0	7	9	5	8	5	3	**39**
28. – 29.	Soňa Špakovská	8.C	0	8	9	5	8	-	4	**38**
	Adam Szamosi	Kvarta A	0	9	6	2	8	9	4	**38**
30. – 33.	Simona Dučaiová	7.B	0	9	5	1	8	-	4	**36**
	Tomáš Feciskanin	Tercia B	0	6	6	6	6	-	6	**36**
	Hana Šándorová	Tercia A	0	9	9	-	4	4	6	**36**
	Emma Pásztorová	3. OA	0	7	9	0	9	5	3	**36**
34. – 39.	Peter Obšatník	7.B	0	9	4	3	9	-	1	**35**
	Samuel Banas	8.	0	9	8	7	-	1	9	**35**
	Jaroslav Birka	7.A	0	8	9	-	-	9	-	**35**
	Gabriela Genčiová	7.B	0	9	9	-	4	4	5	**35**
	Tatiana Kerestiová	7.A	0	7	7	5	3	2	6	**35**
	Martin Bucko	8.A	0	9	8	4	8	1	3	**35**

Poradie	Meno	Trieda	PS	1	2	3	4	5	6	CS
40.	Jakub Mandzák	8.B	0	9	2	5	4	6	6	**34**
41. – 43.	Sophia Horňáková	Sekunda B	0	0	9	5	6	1	3	**33**
	Dárius Pacholský	9.A	0	8	-	7	9	-	9	**33**
	Matúš Papšo	8.D	0	9	8	5	9	1	0	**33**
44. – 45.	Erik Novák	7.A	0	6	5	2	9	1	1	**32**
	Andrej Pankuch	Kvarta	0	9	4	5	9	-	5	**32**
46. – 48.	Barbora Kavečanská	Kvarta	0	8	3	5	9	2	3	**30**
	Martin Nemjo	Tercia A	0	7	9	5	-	-	9	**30**
	Simona Sabovčíková	8.B	0	9	7	3	5	-	3	**30**
49. – 50.	Vladimír Nečesaný	8.D	0	8	9	5	2	-	3	**29**
	Michal Vorobel	3.OA	0	6	5	3	9	2	3	**29**
51. – 55.	Ela Balážová	6.B	0	2	9	1	4	-	3	**28**
	Damián Baňačkai	8.A	0	9	6	5	-	-	8	**28**
	Martin Albert Gbúr	9.A	0	7	-	9	9	-	3	**28**
	Soňa Liptáková	9.B	0	8	-	5	9	-	6	**28**
	Sára Šoltészová	Sekunda B	0	9	1	4	2	0	3	**28**
56. – 57.	Adam Čabrák	7.A	0	9	9	-	-	-	-	**27**
	Michal Stupar	Kvarta B	0	3	6	5	9	-	4	**27**
58. – 60.	Filip Hake	kvarta A	0	8	8	4	3	-	3	**26**
	Lilla Maheľová	7.A	0	9	2	-	-	2	4	**26**
	Lukáš Mikulec	Sekunda	0	9	3	5	-	0	0	**26**
61.	Ema Balážová	7.B	0	6	5	1	4	-	3	**25**
62.	Martina Magdošková	Tercia A	0	9	-	3	4	2	4	**24**
63. – 64.	Ema Lenárthová	7.A	0	5	2	5	1	-	4	**22**
	Jakub Mičko	Sekunda B	0	6	4	3	-	3	-	**22**
65.	Jakub Gembický	Kvarta B	0	-	6	5	7	-	3	**21**
66.	Ivana Benešová	7.A	0	4	-	4	-	-	6	**20**
67. – 68.	Matúš Bucher	7.A	0	9	-	-	-	-	1	**19**
	Michaela Minárová	7.B	0	5	2	-	4	-	3	**19**
69.	Lenka Šándorová	Tercia A	0	7	-	3	3	1	3	**18**
70. – 71.	Martin Čorovčák	kvarta B	0	8	-	3	3	0	3	**17**
	Martin Berka	9.B	0	4	5	-	-	4	4	**17**
72.	Michal Kavuľa	9.B	0	8	-	4	-	-	4	**16**
73. –74.	Radoslav Jochman	Sekunda A	0	6	-	-	3	-	0	**15**
	Tomáš Varmuža	7.	0	6	-	3	-	-	-	**15**
75. – 76.	Marek Maďar	7.A	0	5	-	-	-	-	3	**13**
	Alexander Janoško	9.A	0	4	-	3	5	0	1	**13**
77. – 78.	Martin Kánássy	8.B	0	7	-	2	-	-	3	**12**
	Matúš Vysoký	7.A	0	4	-	5	-	-	3	**12**
79. – 81.	Martin Kliment	7.	0	3	0	2	0	0	3	**11**
	Jakub Koza	7.	0	3	0	3	1	0	1	**11**
	Klára Paľuvová	7.A	0	-	-	5	1	-	-	**11**
82.	Marco Kovaľ	7.A	0	2	-	4	-	-	-	**10**
83. – 84.	Erik Tomko	Tercia B	0	4	5	-	-	-	-	**9**

Poradie	Meno	Trieda	PS	1	2	3	4	5	6	CS
83. – 84.	Jakub Šlauka	7.A	0	-	-	-	3	-	3	**9**
85.	Kristína Šedovičová	8.B	0	8	-	-	-	-	-	**8**
86.	Matúš Hadžega	Tercia B	0	5	-	2	-	-	0	**7**
87.	Dominik Mulidrán	9.	0	0	1	2	-	-	3	**6**

Za podporu a spoluprácu ďakujeme:

Korešpondenčný matematický seminár **MATIK**
Číslo 2 • Zimná časť 29. ročníka (2015/16) • Vychádza 5. novembra 2015
Internet: `http://matik.strom.sk`
E-mail: `matik@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1
Internet: `http://zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `rada@strom.sk`