KOREŠPONDENČNÝ MATEMATICKÝ SEMINÁR

MATIK

ČÍSLO **5** — ROČNÍK **26** INTERNET http://matik.strom.sk

Vážení čitatelia,

opäť držíte v rukách číslo prestížneho vedeckého časopisu MATIK. Určite ste už nedočkaví prečítať si vzorové riešenia, ktoré vám povedia, ako sa dali čo najjednoduchšie riešiť príklady prvej série. Potom sa isto s očakávaním pozriete na poradie, aby ste zistili, ako skvelo ste sa umiestnili. Nakoniec sa isto horlivo pustíte do riešenia príkladov druhej série, aby ste sa mohli zúčastniť toho často ospevovaného a určite vynikajúceho letného sústredenia, na ktoré sa už všetci určite tešíte.

Vaši vedúci MATIKa

Ako bolo

Sústredko Týždeň pred jarnými prázdninami (pre východ, samozrejme) sa v Mníchovskom potoku konalo zimné sústredenie MATIKa pre najlepších riešiteľov. Zahrali ste sa na pokémonských majstrov umiestnených do tréningového centra a za týždeň ste sa museli poriadne vytrénovať, pretože sa mal konať turnaj proti elite a vy ste nechceli prehrať.
Hneď v úvode ste objavili stránku z denníka záhadného DD, ktorého ste neskôr identifikovali ako najobávanejšieho trénera pokémonov Danteho Draka, no medzi majstrov nikdy nepatril, čo vám prišlo podivné. Po ťažkej drine ste sa raz vybrali do krčmy, kde ste stretli pirátov a v hazardných hrách s nimi vyhrali pár pokémonov, no pri odchode vás, žiaľbohu, ale možno aj chvalabohu, okradol Raketový tím a vzal vám všetkých pokémonov!
Rýchlo ste zistili, že proti elite nemáte šancu a že východisko ponúkajú len isté artefakty. Našli ste ich a spolu vás odkázali na Galaxa, pokémona umožňujúceho cestovanie nadľudskou rýchlosťou – toho ste chceli využiť na útek. Súbojmi ste medzi sebou vybrali toho najlepšieho a vydali sa ho chytiť aj napriek tomu, že ste vedeli, že vaša rasa za to možno zaplatí. Tréningové centrum už ale bolo pod útokom pokémonov, ktorých správy označili ako exekútorov.
Situácia sa síce upokojila, ale v noci vás zobudil poplach a núdzové volanie Raketového tímu, ktorý ste boli vyslaní zachrániť. Neskôr ste zistili, že exekútori sú dohliadajúci pokémoni mimozemskej rasy Ovládačov, ktorá ovláda Zem, aby ľudia nemohli expandovať. V momente získania Galaxa sa však aktivoval ničivý mód a teraz je ľudstvo odsúdené na vyhladenie. Preto ste začali cestovať galaxiou a postupne objavili plány zbrane minulých civilizácií, ktorá by vám mohla pomôcť, no žiadna ju nedokončila, lebo im chýbal „stabilizátor“ .
Stretli ste sa s Dantem Drakom a podarilo sa vám presvedčiť ho, aby sa pridal na vašu stranu a chránil zbraň počas výstavby. Spoločnými silami ste v kooperatívke zbraň dostavali a v blízkej novoobjavenej knižnici zistili, že stabilizátorom je práve Galax! Spustili ste zbraň a teleportovali sa do riadiaceho centra Ovládačov, kde ste sa prebojovali až k ovládaciemu panelu a… zničili VŠETKÝCH pokémonov.
Každopádne ste sa mohli po ťažkom týždni konečne uvoľniť, užiť si poslednú noc

sústredka a tešiť sa na ďalšie, ešte lepšie pripravené a so skvelým dejom. Preto neváhajte a vrhnite sa do novej série s nadšením!

Ako bude

Výlet Určite ste už niekedy počuli o legendárne dobrých výletoch organizovaných vašimi najúžasnejšími vedúcimi. Isto sa teda potešíte správe o tom, že ďalší takýto výlet sa nachádza v našich plánoch na budúcnosť. Problém je však v tom, že konkrétny termín ešte neexistuje. Preto, ak sa chcete opäť stretnúť so svojimi priateľmi a vedúcimi a stráviť s nimi úžasný deň, tak sledujte našu Facebookovskú stránku, ale aj webové stránky *http://strom.sk/vylety* a *http://matik.strom.sk*, kde sa v najbližších týždňoch objaví termín tohto výletu.

TMM Hľadáš program na leto zahrňujúci kopu zábavy, nových kamarátov a nezabudnuteľných zážitkov? Toto všetko môžeš nájsť v Tábore mladých matematikov, ktorý organizuje tvoje najobľúbenejšie združenie STROM. Tábor bude od 27. júla do 3. augusta v Kopytovskej doline. Bude to vyzerať ako sústredko, len bude troška dlhšie a zábavnejšie a bude tam trocha menej matiky, takže môžeš kľudne nalákať aj svojich kamarátov a zažiť aj s nimi najlepšie dni leta. Tábor je určený tým, ktorí tento rok skončia siedmy ročník na základke až prvý ročník na strednej, alebo odpovedajúce ročníky na osemročnom gymnáziu. Prihláška sa čoskoro sa objaví na stránke *www.strom.sk/tabory* spolu s ďalšími informáciami.

Vzorové riešenia 1. série úloh

1 opravovali **Dorka Jarošová** a **Dano Till** — 49 riešení

najkrajšie riešenia: Martin Masrna, Miška Dlugošová, Marek Vaško

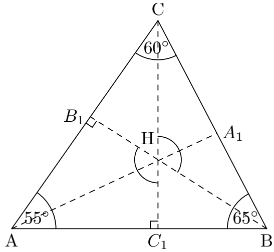
Zadanie

V trojuholníku ABC je vnútorný uhol pri vrchole A rovný 55° a uhol pri vrchole B rovný 65°. Označme H priesečník výšok v trojuholníku ABC. Vypočítajte veľkosť uhla BHC.

Vzorové riešenie

1. riešenie

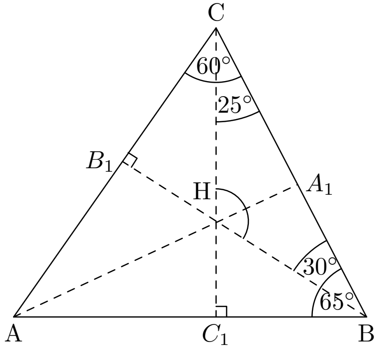
Najprv si uvedomíme, že keďže sú všetky vnútorné uhly pri vrcholoch trojuholníka ABC ostré ($|\sphericalangle BAC| = 55^\circ$, $|\sphericalangle ABC| = 65^\circ$ a $|\sphericalangle ACB| = 180^\circ - 55^\circ - 65^\circ = 60^\circ$), tak priesečník výšok bude v trojuholníku ABC. Označíme si priesečník úsečky AB a výšky na stranu AB ako C_1 a priesečník úsečky CA a výšky na stranu CA ako B_1. Potom $|\sphericalangle C_1HB_1| = |\sphericalangle BHC|$, pretože sú to vrcholové uhly.



Všimnime si, že v štvoruholníku AC_1HB_1 poznáme všetky uhly okrem $\sphericalangle C_1HB_1$, pretože v zadaní je, že $|\sphericalangle BAC| = 55^\circ$ a pri vrcholoch C_1 a B_1 je 90°, pretože sú to priesečníky kolmíc s príslušnými stranami trojuholníka ABC. Keďže vieme, že súčet vnútorných uhlov je v každom štvoruholníku $360°$, tak $|\sphericalangle C_1HB_1|$ ľahko vypočítame: $360° - 55° - 90° - 90° = 125°$. Teda $|\sphericalangle BHC|$ je tiež $125°$.

2. riešenie

Mnohí z vás túto úlohu ale riešili iným spôsobom, preto uvádzame ešte ďalšie riešenie. Keďže súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je $180°$ a v zadaní je napísané, že $|\sphericalangle BAC| = 55°$ a $|\sphericalangle ABC| = 65°$, tak $|\sphericalangle ACB| = 180° - 55° - 65° = 60°$.



Ďalej si označíme priesečník úsečky AB a výšky na stranu AB ako C_1, priesečník úsečky CA a výšky na stranu CA ako B_1 a priesečník úsečky BC a výšky na stranu BC ako A_1. Keďže chceme vedieť $|\sphericalangle CHB|$, tak si vypočítame veľkosti uhlov HCB a HBC, ktoré sú rovnako veľké ako $\sphericalangle C_1CB$ a $\sphericalangle B_1BC$ v tomto poradí.

Preto sa pozrieme na trojuholník B_1BC a vidíme, že tam nepoznáme iba veľkosť jedného uhla, a to $|\sphericalangle B_1BC|$. Ale ako sme vyššie napísali vieme, že súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je $180°$, preto $|\sphericalangle B_1BC| = 180° - 90° - 60° = 30°$. Rovnako to urobíme s trojuholníkom C_1CB, kde nepoznáme iba $|\sphericalangle C_1CB|$, teda ju opäť spočítame ako súčet vnútorných uhlov trojuholníka mínus veľkosti už zistených uhlov, čo je $180° - 90° - 65° = 25°$.

Teraz už vieme veľkosti uhlov C_1CB a B_1BC, teda vieme aj veľkosti uhlov HCB a HBC, takže v trojuholníku HBC nepoznáme už iba $|\sphericalangle BHC|$, ktorý chceme vedieť, teda ho spočítame ako v predchádzajúcich prípadoch: $180° - 30° - 25° = 125°$, čo je to, čo sme chceli vypočítať.

Komentár Veľa z vás zvládlo túto úlohu pekne. Mnohí však neuviedli, z čoho ich výpočty vychádzajú alebo ako sa také výpočty robia. Napriek tomu sa táto úloha tešila veľkému počtu správnych riešení.

2

opravovali **Ivka Gašková** a **Peťo Kovács**

najkrajšie riešenie: Samuel Krajči

48 riešení

Zadanie

Počet obyvateľov Trolova je podľa kráľa Ernesta, ktorý je inak výnimočne hlúpy trol, 54 806 372. Pre lepšiu organizáciu ich chcela Blanka rozdeliť do 8 rovnako početných oddielov. Ernest je ale vážny prípad, preto vieme, že v čísle prehodil nejaké dve číslice. Dajú sa v čísle 54 806 372 navzájom vymeniť práve dve číslice tak, aby Blanka vedela rozdeliť trolov do 8 rovnakých oddielov? Ak áno, napíš všetky možnosti, koľko obyvateľov v dedine mohlo byť, ak nie, napíš prečo.

Vzorové riešenie

Číslo je deliteľné ôsmimi práve vtedy, keď je jeho posledné trojčíslie deliteľné ôsmimi. V čísle 54 806 372 je posledné trojčíslie 372. Toto číslo po delení ôsmimi dáva zvyšok 4, a teda ôsmimi deliteľné nie je, čo znamená, že budeme vymieňať buď dve číslice v poslednom trojčíslí navzájom medzi sebou, alebo s jednou z číslic z prvého 5-čísla.

• Poďme sa teda pozrieť, ako môžeme navzájom meniť posledné tri číslice. Po výmene dostaneme trojčíslia: 273, 732, 327 – pričom ani jedno z nich nie je deliteľné ôsmimi.

• Ideme vymieňať cifru na mieste jednotiek v poslednom trojčíslí. 372/8 nám dáva zvyšok 4, čiže ak chceme, aby číslo bolo deliteľné ôsmimi, tak ho musíme buď zväčšiť, alebo zmenšiť o 4. Ak by sme zmenšovali, zmeníme aj cifru na mieste desiatok, čo nechceme. V tejto časti nám teda vyjde jedno riešenie, a to 372 + 4 = = **376**.

• Teraz vymieňame cifru na mieste desiatok. Ak ju zväčšíme (zmenšíme) o 1, zvyšok sa zväčší (zmenší) o 2. Keďže máme zvyšok 4, chceme ho dostať na číslo deliteľné 8. Teda môžeme číslicu o 2 zväčšiť, alebo zmenšiť. Dostaneme čísla 312, 332, 352, 392. Z týchto trojčísiel len 352 sa dá dosiahnuť výmenou dvoch číslic v našom čísle. Vyjde nám teda opäť jedno riešenie, a to **352**.

• Meníme číslicu na mieste stoviek. Zväčšenie, či zmenšenie o 1, nám zvyšok zväčší (zmenší) o 4. Analogicky ako v predchadzajucom odseku dostaneme čísla 072, 472, 672, 872. Všetky tieto trojčíslia viem poskladať výmenou dvoch číslic, takže v tomto bode nám pribudnú 4 riešenia: **072, 472, 672, 872**.
Rozobrali sme všetky možné výmeny dvoch číslic v zadanom čísle. Úloha má teda 6 riešení:
54 306 872, 54 803 672, 53 806 472, 54 836 072, 74 806 352, 54 802 376

Komentár

Mnohí z vás sa netrápili tým, ako si úlohu uľahčiť, ale vyskúšali všetky možnosti ako vymeniť číslice v danom čísle, čo je veľmi neefektívny spôsob riešenia. Niekedy sa oplatí hlbšie sa zamyslieť a prísť na akési zlepšováky. V konečnom dôsledku si tak skrátite čas strávený nad úlohou.

3

opravovali **Janka Baranová** a **Matúš Hlaváčik**
najkrajšie riešenie: Martin Masrna

43 riešení

Zadanie

V obchode so zbraňami mali tento týždeň 10 rôznych kyjov (z každého práve jeden kus). Jednotlivé kyje predávali za 12, 15, 16, 17, 19, 22, 23, 29, 35 a 39 trolých zlaťákov. V pondelok predali 4 kyje, v utorok 3 a v stredu 2 kyje. Všimli si, že v pondelok zarobili dvakrát viac ako v utorok a trikrát viac ako v stredu. Ktoré kyje predali v jednotlivých dňoch?

Vzorové riešenie

Podľa zadania v pondelok predali kyje za dvakrát viac ako v utorok a trikrát viac ako v stredu, tak ak si označíme zárobok z pondelka $6x$ (to preto, aby sme pracovali s celými číslami pri zárobkoch utorka a stredy), tak v utorok zarobili $3x$ a v stredu $2x$. To znamená, že spolu zarobili $11x$. Keďže x je celé číslo, tak celkový zárobok musí potom byť deliteľný 11. Pôvodne mali dokopy 10 kyjov, ale predali len 9, teda 1 kyj zostal. Cena všetkých 10 kyjov je 227, čo po vydelení 11 dáva zvyšok 7. Možné ceny ich celkového zárobku vypočítame tak, že od tejto hodnoty odpočítame postupne jednotlivé ceny kyjov. Dostaneme tak 10 súm, z ktorých len jedna je deliteľná 11, a to tá, ktorú dostaneme, keď v obchode nepredali kyj za 29. Alebo si uvedomíme, že aby bol rozdiel deliteľný 11, tak obe čísla musia dávať rovnaký zvyšok po delení 11. Keďže 227 dáva zvyšok 7, tak aj nepredaný kyj musí dávať zvyšok 7 a jediný taký kyj je ten za 29.

Vieme, ktoré kyje predali a tiež aj celkový zárobok, ktorý je 198, z čoho vieme vypočítať x ($x = 198/11 = 18$). Teraz už vieme vypočítať, koľko zarobili v jednotlivé dni. V pondelok zarobili 108, v utorok 54 a v stredu 36. Ešte musíme zistiť, ktoré kyje predali v ktorý deň.

Začneme stredou, pretože vtedy predali len dva kyje, teda máme najmenej možností. Dokopy zarobili 36, teda kyj za 39 to byť určite nemohol. Teraz si vezmeme každý kyj a odčítame ho od 36 (viď. tabuľka). Ak bude rozdiel rovný cene nejakému inému kyju, ktorý máme, tak túto dvojicu kyjov mohli v stredu predať. Keď to urobíme, tak zistíme, že jediná vyhovujúca dvojica sú kyje za 17 a 19. V stredu museli predať práve tieto dva.

kyj	12	15	16	**17**	**19**	22	23	35
36 - kyj	24	21	20	**19**	**17**	14	13	1

Pokračujme utorkom. V utorok predali tri kyje dokopy za 54. Súčet dvoch najlacnejších kyjov je 27 ($15 + 12$), tretí kyj teda môže stáť maximálne $54 - 27 = 27$. To znamená, že kyje za 39 a 35 v utorok určite nemohli predať, a tak ich museli predať v pondelok.

V pondelok predali 4 kyje dokopy za 108, z čoho sú dva z nich kyje za 35 a 39. Zvyšné dva kyje, ktoré predali v ten deň dokopy stáli $108-35-39$, teda 34. Budeme postupovať rovnako ako pri hľadaní dvojice kyjov, ktorú predali v stredu a zistíme, že pondelku vyhovuje len dvojica kyjov za 12 a 22. To znamená, že v pondelok predali kyje za 12, 22, 35 a 39 a v utorok teda predali zvyšné tri kyje (za 15, 16 a 23).

Komentár

Mnohí z vás ste sa dopracovali k tomu, koľko zarobili v konkrétne dni, ale potom ste už nenapísali, ako ste našli vyhovujúce rozdelenie kyjov, ale ste iba napísali, že to sedí. Ak by znela otázka „Koľko zarobili v jednotlivé dni?“ , tak by to možno aj stačilo, ale vašou úlohou bolo zistiť, ktoré kyje predali v aký deň, takže aj k tomu bolo potrebné napísať nejaký konkrétnejší postup. Iným odporúčame poriadnejšie čítať zadanie a ďalším zase popísať spôsob, ako ste skúšali, pretože skúšanie je len málokedy plnohodnotné riešenie úlohy. Matematicky korektné je totiž len vtedy, ak vyskúšate **všetky** možnosti.

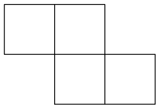
4 opravovali **Maťo Rapavý** a **Maťo Vodička**

najkrajšie riešenia: Samuel Krajči, Lenka Kopfová

46 riešení

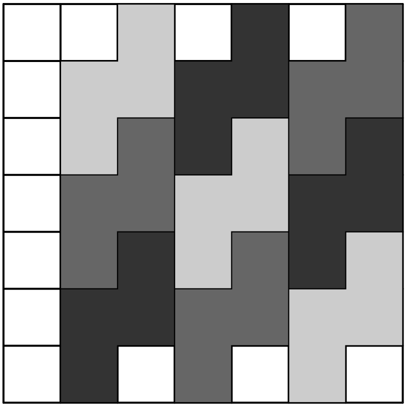
Zadanie

Majme štvorcovú podlahu rozmeru 7×7 trolometrov rozdelenú na 49 bielych štvorcových dlaždičiek rozmeru 1×1 trolometra. Koľko najmenej dlaždičiek treba zafarbiť na čierno, aby sa na biele dlaždičky nedal položiť ani jeden koberec tvaru 'Z' (viď. obrázok) zložený zo 4 dlaždičiek tvaru štvorca s rozmerom 1×1 trolometra? Koberec vieme ľubovoľne otáčať alebo preklápať.



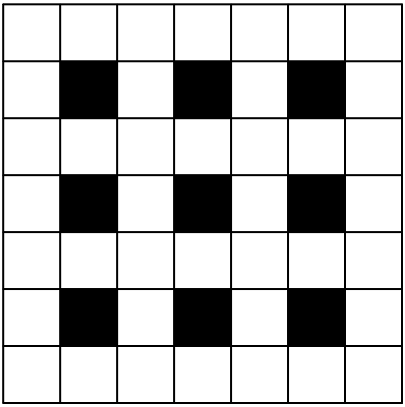
Vzorové riešenie

Po chvíľke skúšania sa nám podarí objaviť, že 9 by mohlo byť najmenším riešením, teda našou úlohou bude ukázať, že menšie riešenie ako 9 neexistuje a že 9 vyhovuje.
Aby sme ukázali, že menšie riešenie ako 9 neexistuje potrebujeme nájsť také rozloženie kobercov, aby sa ich na podlahu zmestilo 9 bez toho, aby sa prekrývali, teda na zabránenie položeniu každého jedného z nich budeme potrebovať ofarbiť 1 dlaždičku. Rozloženie môže vyzerať napríklad takto:



Teda ak by sme nezafarbili dlaždičku z každého koberca, tak ten koberec by sa na podlahu dal položiť. Z toho vyplýva, že potrebujeme ofarbiť najmenej 9 dlaždičiek (keďže sme uložili 9 kobercov).

Vyhovujúce riešenie pre 9 ofarbených štvorčekov vyzerá takto:



Je zjavné, že na takto ofarbenú podlahu sa žiaden koberec položiť nedá.
A úloha je vyriešená :)

Komentár

Riešenie každej úlohy, kde treba nájsť najmenší počet niečoho sa skladá (ako v riešení vyššie) z 2 častí. Nájsť konkrétny príklad, ako to ide na ten počet (v našom prípade zafarbiť 9 štvorčekov) a veľmi dôležitej druhej časti – dokázať, že menší počet nestačí. Väčšinou najprv riešite prvú časť – a aj teraz ste nám často písali, ako ste hľadali riešenie, čo to muselo splňovať atď. Toto všetko sa však týka len prvej časti. Pri dokazovaní, že to na menej (ako 9 v našom prípade) nejde, vám to je však väčšinou na nič. Lebo dokázať, že postup akým ste to zafarbili, je optimálny, je celkom ťažké. Väčšinou treba postupovať úplne inak – v riešení hore je to nakreslenie 9 kobercov do štvorca. Veľa z vás to napríklad riešilo tak, že prišlo na to, že ak v štvorci zafarbíte stredný štvorec, už sa tam nič nezmestí. Tak ste prišli na riešenie s 9. Avšak opäť je vám tento poznatok na nič pri dokazovaní, že menej ako 9 nejde, lebo tam chcete nájsť práve malú oblasť, z ktorej treba nutne 1 pole zafarbiť a nie veľkú. Veríme, že keď bude nabudúce nejaká takáto úloha, tak vám aj toto pomôže ju lepšie vyriešiť.

5 opravovali **Joži Janovec** a **Robčo Tóth**

najkrajšie riešenia: Martin Melicher, Zoltán Hanesz

43 riešení

Zadanie

V trololahôdkách majú každý deň v ponuke jeden zo 16 druhov konských šalátov. Zaujímavé je, že každý druh má svoje vlastné číslo od 1 po 16 (každý druh iné). Toto číslovanie má aj praktický význam, konkrétne cenu šalátu si môžete ľahko vypočítať ako dvojnásobok čísla druhu daného šalátu mínus 1. Ďalšia zaujímavosť o tomto obchodíku je, že ak si chcete niečo kúpiť, musíte zaplatiť presnú sumu. Inak vám tovar nedajú. Koľko najmenej kusov mincí a akých celočíselných hodnôt

Vilém potrebuje, aby si mohol kúpiť jeden šalát (bez ohľadu na to, aký druh dnes ponúkajú)? Zdôvodnite, prečo menší počet mincí nestačí.

Vzorové riešenie

Na začiatok musíme zistiť, koľko najmenej mincí nám treba, aby sme mohli zakúpiť hociktorý šalát. Pozrime sa na to, koľko rôznych súm vieme s koľkými mincami zaplatiť (bez ohľadu na cenu šalátov). Jednou mincou vieme zaplatiť jednu sumu. Dvomi mincami sa dajú zaplatiť nanajvýš tri rôzne sumy. S tromi mincami je to najviac sedem možností, pre štyri mince je to najviac pätnásť možností. Ak tomuto tvrdeniu neveríte, skúste si napísať všetky možné kombinácie mincí s hodnotami A, B, C a D (A, B, C, D, $A + B$, $\ldots$). My máme byť ale schopní zaplatiť až 16 rôznych cien šalátov, a preto budeme potrebovať aspoň päť mincí. Teraz sa len stačí chvíľu pohrať a po chvíli nájdeme jedno z riešení 1, 2, 4, 8 a 16. Ostáva už len opravovateľov presvedčiť, že naše riešenie je naozaj dobré:

1	1	3	1 + 2
5	1 + 4	7	1 + 2 + 4
9	1 + 8	11	1 + 2 + 8
13	1 + 4 + 8	15	1 + 2 + 4 + 8
17	1 + 16	19	1 + 2 + 16
21	1 + 4 + 16	23	1 + 2 + 4 + 16
25	1 + 8 + 16	27	1 + 2 + 8 + 16
29	1 + 4 + 8 + 16	31	1 + 2 + 4 + 8 + 16

Komentár

Za odhalenie riešenia a ukázanie jeho správnosti bolo 5 bodov. Za vysvetlenie, prečo to na menej mincí nejde, boli 4 body.

6 opravovali **Rišo Trembecký** a **Matúš Stehlík**

najkrajšie riešenie: Pavol Drotár

22 riešení

Zadanie

Keď prišla Blanka k Veštici, v čakárni stálo v rade za sebou niekoľko trolov. Každý trol mal kartičku s nejakým celým číslom, tieto čísla mohli byť aj rovnaké. Blanka si všimla, že

- Ak sčíta čísla na kartičkách *ľubovoľných* 7 bezprostredne za sebou stojacich trolov, dostane záporný výsledok.
- Ak sčíta čísla na kartičkách *ľubovoľných* 11 bezprostredne za sebou stojacich trolov, dostane kladný výsledok. (Kde slovíčkom *ľubovoľných* rozumieme, že to platí pre každú takú skupinku.)

Koľko najviac trolov môže stáť v tomto rade tak, aby čísla na ich kartičkách stále spĺňali Blankine pozorovania?

Vzorové riešenie

Samotné riešenie úlohy rozdelíme do dvoch krokov. Prvým odôvodníme, že 17 a viac člennú postupnosť trolov vytvoriť nedokážeme. V druhom nájdeme nejakú vyhovujúcu 16-člennú postupnosť, teda budeme vedieť, že 16 je dosiahnuteľné maximum.

Označme si členy 17-člennej postupnosti trolov od a_1 po a_{17}.

Po riadkoch si teraz vypíšeme všetky rôzne sedmice za sebou stojacich trolov.

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\
a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\
a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\
a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \\
a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} \\
a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\
a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\
a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17}
\end{array}
$$

Môžeme si všimnúť, že po stĺpcoch nám takto vznikli všetky rôzne jedenástice. Čo sa stane, ak by sme chceli tieto čísla zrátať?

• Ak by sme zrátali súčet čísel v tabuľke po riadkoch, dostaneme záporný súčet. Pretože v každom riadku je súčet záporný.

• Ak by sme zrátali súčet čísel v tabuľke po stĺpcoch, dostaneme kladný súčet. Pretože v každom stĺpci je súčet kladný.

Teda súčet čísel v tejto tabuľke je aj záporný aj kladný, čo sa nikdy nemôže stať, lebo je to jedno číslo. Nesprávny musel byť potom predpoklad, že takáto 17-členná postupnosť existuje. Ak neexistuje 17-členná postupnosť, tak nemôže existovať ani žiadna dlhšia, inak by jej prvých 17 členov tvorilo práve takúto rozporuplnú postupnosť. Preto najdhšia možná takáto postupnosť má najviac 16 členov.

Nájsť vyhovujúcu 16-člennú postupnosť vôbec nie je ľahké, prinášame vám príklad jednej, ale bez postupu ako ju vytvoriť, keďže to vôbec nebola nutná časť riešenia, stačilo uviesť príklad, aby sme verili, že existuje.

$5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5$ V tejto postupnosti sa v každej sedmici nachádza 2–krát (-13) a 5–krát 5 so záporným súčtom -1 a v každej jedenástici 3–krát (-13) a 8–krát 5 s kladným súčtom 1.

Komentár

Väčšina z vás úlohu riešila na konkrétnom príklade, ktorý sa vám zdal vhodný a pre tento príklad ste ukázali, že viac trolov tu už stáť nemôže. Tento postup ale nebol najlepší a len málo ľudí sa pokúsilo hlavne všeobecne zhora ohraničiť možnú dĺžku postupnosti trolov. Uvedomujeme si, že úloha bola naozaj ťažká a nabudúce by sme ju možno rozdelili na dve časti *a)* a *b)*, kde by ste v *a)* mali odôvodniť, prečo ich nemohlo byť viac ako 16 a v *b)* nájsť jednu takú vyhovujúcu 16-tku, čo je samo o sebe dosť problém. V tejto formulácii úlohy by ste aspoň mali informáciu, že maximum je 16, preto by ste sa o to mohli oprieť a nedospeli by ste k mylným predpokladom.

Zadania 2. série úloh

Úlohy pošlite najneskôr **29. apríla 2013**

Tieto úlohy aj s príbehom nájdete na stránke *http://matik.strom.sk/zadania.php* alebo v minulom čísle vášho časopisu.

Úloha 1. *Zlaté pravidlo trpaslíkov hovorí, že v dedine je* zlatý počet samíc a samcov *práve vtedy, keď platia oba nasledujúce tvrdenia:*

- *Keď päť samcov odíde, ostanú na každého samca dve samice.*
- *Keď odíde 5 samcov a 25 samíc, ostanú na každú samicu traja samci.*

Nájdite všetky zlaté počty samíc a samcov v dedine.

Úloha 2. *Hráči majú pred sebou dve kôpky po 20 zápaliek. Hráč, ktorý je na ťahu, môže odobrať buď najviac štyri zápalky z prvej kôpky, alebo najviac päť zápaliek z druhej kôpky. Avšak za svoj ťah musí odobrať aspoň jednu zápalku. V ťahoch sa striedajú. Vyhráva hráč, ktorý zoberie poslednú zápalku. Ktorý z hráčov vie vždy vyhrať? Ako má postupovať pri svojej hre?*

Úloha 3. *Od narodenia som býval v meste, boli tam domy pospájané cestami. Každé dva domy boli spojené najviac jednou cestou. Domy boli dvoch typov: domy v centre a domy na okraji. Každý dom v centre bol spojený s práve troma ľubovoľnými domami v meste a každý dom na okraji mesta bol spojený presne s dvoma ľubovoľnými domami v meste. Ak viete, že domov v centre mesta bolo rovnako veľa ako domov na okraji mesta a že v meste je práve 30 ciest, koľko bolo v meste domov? Navrhnite, ako môže vyzerať jedno také mesto.*

Úloha 4. *Nikdy som sa tomu siedmakovi nemal vysmievať, že nenájde všetky prirodzené čísla také, ktoré sa rovnajú desaťnásobku svojho ciferného súčtu. Nemal som sa mu vyhrážať, že ak zabudne ukázať, že žiadne iné čísla nevyhovujú, tak mu ukážem, aká je moja sestra Anomália! Nájdi všetky prirodzené čísla také, ktoré sa rovnajú desaťnásobku svojho ciferného súčtu a nezabudni ukázať, že iné nie sú.*

Úloha 5. *Štvorec $n \times n$ trolometrov je rozdelený na $n \cdot n$ štvorcov s rozmerom 1×1 trolometer. Nejakých n z nich je ofarbených na čierno (neviete ktorých n). Zistite, či je možné vždy vybrať biely obdĺžnik (alebo štvorec) s obsahom $S \geq n$ trolmetrov^2, bez ohľadu na to, ktorých n štvorcov je zafarbených, ak*

- $n = 7$,
- $n = 8$.

Úloha 6. *Máme pravouhlý trojuholník ABC. Pri vrchole C je pravý uhol a pri vrchole B je vnútorný uhol s veľkosťou 36°. V strede úsečky CA je bod X a na úsečke AB leží bod Y v jednej štvrtine od bodu A (teda $4 \cdot |AY| = |AB|$). Aký veľký je uhol XYB?*

Poradie po 1. sérii

PS je súčet bodov za predchádzajúce série, **1–6** sú body za jednotlivé úlohy a **CS** je celkový súčet bodov.

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	CS
1. – 2.	Martin Melicher	7. A	ZKro4KE	0	9	9	7	7	9	-	**50**
	Samuel Krajči	Sekunda	GAlejKE	0	8	9	6	9	9	-	**50**
3.	Lenka Kopfová	7. A	ZHradCZ	0	9	8	6	9	7	-	**48**
4.	Kristína Bratková	8. A	ZKe30KE	0	8	9	9	9	6	0	**47**
5.	Martin Masrna	8. A	ZKro4KE	0	9	7	9	6	9	2	**46**
6.	Viktória Brezinová	Sekunda	GAlejKE	0	8	9	7	5	6	1	**44**
7.	Natália Česánková	8. A	ZHvieLY	0	9	7	9	6	6	1	**43**
8.	Martin Mihálik	Sekunda	GAlejKE	0	8	8	5	3	9	-	**42**
9.	Zoltán Hanesz	9. A	ZKuzmKE	0	9	9	7	6	9	1	**41**
10.	Martin Mičko	Sekunda	GAlejKE	0	9	8	5	3	6	-	**40**
11.	Martin Števko	Sekunda	GAlejKE	0	9	7	8	4	2	0	**39**
12.	Juraj Mičko	9. A	ZKro4KE	0	9	8	6	8	6	1	**38**
13. – 14.	Jakub Genči	9. A	ZKro4KE	0	9	9	9	4	5	1	**37**
	Katarína Kuľková	8. A	ZSDrienov	0	9	7	9	3	6	1	**37**
15.	Martin Šalagovič	Sekunda	GAlejKE	0	9	8	1	3	6	-	**36**
16.	Vladimír Durňák	Sekunda	GAlejKE	0	9	7	1	3	6	-	**35**
17. – 19.	Adam Urbán	9. A	ZKuzmKE	0	9	9	6	3	5	2	**34**
	Martin Spišák	Tercia A	GAlejKE	0	9	7	6	3	6	1	**34**
	Samuel Chaba	Sekunda	GAlejKE	0	4	7	5	5	6	-	**34**
20. – 21.	Tomáš Miškov	Sekunda B	GTr12KE	0	9	7	0	3	5	-	**33**
	Lucia Hlaváčiková	8. A	ZGemeKE	0	9	7	5	3	6	-	**33**
22.	Matúš Zakucia	Tercia A	GAlejKE	0	7	6	5	3	6	1	**30**
23. – 25.	Rastislav Špakovský	8. B	ZTomKe	0	8	8	6	1	5	-	**29**
	Lívia Knapčoková	Sekunda	GAlejKE	0	6	7	1	3	5	-	**29**
	Pavol Drotár	9. A	ZSkoSnB	0	9	7	5	3	2	3	**29**
26. – 28.	Juraj Jursa	Tercia B	ZKro4KE	0	8	8	7	3	1	1	**28**
	Filip Csonka	Sekunda	GAlejKE	0	6	3	5	3	5	1	**28**
	Matej Genči	8. A	ZKro4KE	0	6	4	6	3	6	-	**28**
29.	Marek Vaško	7. B	ZMukaPO	0	9	7	-	1	1	-	**27**
30. – 31.	Veronika Novákiová	7. B	ZHlinŽA	0	8	3	4	1	2	-	**26**
	Tereza Rudzanová	Sekunda	GAlejKE	0	7	3	3	4	2	1	**26**
32. – 33.	Erik Berta	Sekunda	GAlejKE	0	6	3	1	3	6	-	**25**
	Veronika Schmidtová	9. A	ZKro4KE	0	8	5	6	4	2	-	**25**

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	CS
34.	Marek Németh	9. A	ZSpisTE	0	9	4	6	3	2	-	**24**
35. – 36.	Silvia Skokanová	9. A	ZSpisTE	0	9	3	6	3	1	-	**22**
	Kamil Fedič	8. C	ZHrnčHÉ	0	2	7	6	3	2	1	**22**
37. – 38.	Michaela Dlugošová	8. B	ZFranPP	0	9	9	-	3	-	-	**21**
	Jonáš Suvák	7. C	ZŠmerPO	0	3	1	4	3	5	1	**21**
39.	Katarína Jantošová	7. B	ZHlinŽA	0	1	2	1	3	5	-	**17**
40.	Adrián Lacko	Tercia B	GAlejKE	0	9	2	1	1	2	0	**16**
41. – 43.	Tomáš Tóth	8. A	ZKro4KE	0	9	6	0	-	-	-	**15**
	Milena Kaprálová	Sekunda	GKomeLY	0	0	5	1	3	1	-	**15**
	Nikola Svetozarov	8. B	ZKro4KE	0	8	7	-	-	-	-	**15**
44.	Katarína Piptová	8. B	ZTomKe	0	1	8	1	1	2	0	**14**
45.	Max Õrhalmi	Tercia A	GAlejKE	0	8	3	0	-	-	-	**11**
46. – 48.	Matej Dubinský	8. A	ZKro4KE	0	0	8	-	1	-	-	**9**
	Samuel Ivan	7. B	ZŠmerPO	0	0	1	1	3	1	0	**9**
	Juraj Slivka	8. B	ZTomKe	0	1	1	3	1	-	-	**9**
49.	Peter Čulen	8. A	ZKro4KE	0	1	4	-	-	-	-	**5**
50. – 51.	Ivana Topitkalová	8. B	ZTomKe	0	0	1	1	0	2	0	**4**
	Lenka Zajacová	8. A	ZMaurKE	0	-	-	-	3	1	-	**4**
52.	Zuzana Mladšíková	8. A	ZMaurKE	0	1	-	-	1	-	-	**2**
53.	Michal Dolník	8. A	ZMaurKE	0	-	-	1	-	-	-	**1**

Za podporu a spoluprácu ďakujeme:

AGENTÚRA NA PODPORU VÝSKUMU A VÝVOJA

Korešpondenčný matematický seminár **MATIK**
Číslo 5 • Letná časť 26. ročníka (2012/13) • Vychádza 11. apríla 2013
Internet: `http://matik.strom.sk` • E-mail: `matik@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1
Internet: `http://www.strom.sk` • E-mail: `zdruzenie@strom.sk`