KOREŠPONDENČNÝ MATEMATICKÝ SEMINÁR

MATIK

ČÍSLO **5** — ROČNÍK **25** INTERNET http://matik.strom.sk

Nazdar Matici!

Po prvej sérii plnej zábavy a matematiky vám prinášame dlhoočakávané poradie, ktoré ako titulky na záver filmu ukážu, kto sú tie super hviezdy, teda adepti na sústredko. Tu to ale ešte zďaleka nekončí. Tvrdá drina a bezsenné noci ešte neskončili. Máme tu ešte jednu sériu, v ktorej ide o veľa! Tak nezaháľaj a počítaj, nedaj súperovi náskok. Zatiaľ vám budeme len držať palec, ale verte alebo nie, už sa tešíme na opravovanie správnych riešení.

Vaši opravovatelia

Ako bolo...

Sústredko Ako sa môže niečo rýchlo zvrtnúť zistili tí, ktorí mali to šťastie (alebo boli takí dobrí), že sa zúčastnili zimného *MATIK*a na Zelenom Brehu. Prišli tam totiž na konferenciu, ale namiesto toho, aby sa niečo dozvedeli, boli svedkami vraždy. Vedeli, že vrahom je minister, a tak ho obžalovali z vraždy.
No všetci podcenili jeho moc a na súde ich ministrovi právnici (vedúci) doslova zničili a nakoniec boli sami zatknutí za vraždu. Ale nevzdali sa a podarilo sa im z väzenia ujsť, hoci to bolo veľmi náročné, okrem iného aj kvôli počasiu. Samozrejme hneď sa museli skryť, keďže boli na úteku, a niektorí sa skryli tak dobre, že ich nenašli ani vedúci. Ďalší deň hneď pátrali po dôkazoch a zistili aj to, že minister patrí do veľkej organizácie – Vycišplánu.
Získali moc vplyvných ľudí, zistili ako ľudí z organizácie zničiť a už im nič nebránilo v tom, aby sa nemilosrdne vrhli na Vycišplán. No niektorí z Vycišplánu odolali aj tomuto útoku, avšak tentoraz mali účastníci šťastie, lebo sa napokon pozabíjali navzájom. A na miesto došla aj polícia a tých, čo prežili, zatkla. A všetci si mohli vydýchnuť a ísť ďalší deň domov. No určite sa už všetci tešia na ďalšie sústredenie. Tak rátajte, aby ste sa ho mohli zúčastniť aj Vy!

Vzorové riešenia 1. série úloh

1 opravovali **Ivka Gašková** a **Matúš Hlaváčik**
najkrajšie riešenie: Natália Česánková, Petra Plšková

42 riešení

Zadanie:
Dorotissimo má zabezpečiť, aby mala každá ťava, ktorá pôjde na svadbu, mašličku na chvoste. Svadobčania si želali, aby súčet poradových čísel tiav na ich svadbe bol presne 20, no keďže ťavy mali špinavé zadky, nevie, ktorá ťava má aké poradové číslo. Vedel však, že ťavy, ktoré má k dispozícií, majú poradové čísla $1, 3, 5, \dots, 19$. Koľkým ťavám musí Dorotissimo priviazať mašličku na chvost, aby sa z nich určite dalo vybrať niekoľko so súčtom poradových čísel práve 20, ak chcel použiť čo najmenej mašličiek?

Riešenie:

Budeme sa snažiť dostať z čísel $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$ súčet 20. Keďže všetky čísla sú nepárne a 20 je párne číslo, dostaneme ho sčítaním párneho počtu tiav. Existuje päť dvojíc tiav takých, že súčet každej dvojice je 20. Konkrétne sú to $(1+19)$, $(3+17)$, $(5+15)$, $(7+13)$ a $(9+11)$. Štvorice sú len dve $(1+3+5+11)$ a $(1+3+7+9)$. Viac čísel vybrať nemá zmysel, lebo keď sčítame šesť najmenších čísel, tak to je $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$, čo je viac ako 20.

Teraz sa zamyslime nad tým, koľko tiav potrebuje označiť mašľou tak, aby sa medzi nimi určite nachádzala dvojica alebo štvorica, ktorá dáva súčet 20. Máme päť dvojíc. Ak z každej dvojice vyberieme to väčšie číslo, dostaneme pätícu tiav 11, 13, 15, 17 a 19. Z tejto pätice určite nevieme vybrať dvojicu ani štvoricu so súčtom 20. Z toho vyplýva, že ak označí päť a menej tiav, tak nemá istotu, že tam bude súčet 20.

Teraz potrebujeme ukázať, že ak zaviažem mašličku šiestim ťavám, tak tam určite bude súčet 20. Máme 10 čísel $(1, 3, 5 \ldots 19)$, ktoré vieme rozdeliť na 5 dvojíc, ktoré dávajú súčet po 20. Ak zoberieme šesť čísel (tiav), tak dve z nich určite budú patriť do jednej dvojice (keďže ak by sme aj zobrali jednu ťavu z každého páru, tak akejkoľvek šiestej ťave zaviažeme mašličku, vždy bude tvoriť „pár" a teda súčet 20 s nejakým predchádzajúcim členom). To znamená, že Dorotissimo musí priviazať mašľu aspoň šiestim ťavám, aby mal istotu, že tam bude skupina, ktorá dáva súčet 20.

Komentár:

Úlohu ste vyriešili veľmi pekne. Mnohí z vás však našli správny výsledok, no nedostatočne odôvodnili, prečo to s menším počtom mašličiek nejde. Nestačí napísať, že pre päť tiav to nevyhovuje, bolo by dobré, ak by ste k tomu napísali aspoň, že z toho vyplýva, že to nejde ani na menší počet. Vo všeobecnosti platí, že každú úlohu treba čo najviac popísať, a to ani nie tak v zmysle rozsiahlosti textu, ako skôr čo sa týka vysvetlenia. Nebojte sa, potešíme sa tomu. Častokrát sa totiž v tejto úlohe stávalo, že ste niektoré veci brali ako samozrejmé a do riešenia ste ich už nenapísali. Potom nám ale nanešťastie nebolo jasné, či to také jasné bolo aj vám. :P

2 opravovali **Deniska Semanišinová** a **Maťo Vodička**

najkrajšie riešenia: Samuel Krajči, Martin Masrna

40 riešení

Zadanie:

Muži Anastažionne, Bartolomeoság a Catherinussios predniesli pred Dorotissimom nasledujúce tvrdenia:

- Anastažionne: „Ťava patrí Catherinussiosovi."
- Bartolomeoság: „Moja ťavička to nie je."
- Catherinussios: „Aspoň dvaja z nás luhajú."

Z toho Dorotissimo ešte nevedel určiť, kto je majiteľom ťavy, tak sa ich opäť spýtal, komu patrí. Catherinussios odpovedal a menoval buď Anastažionneho, Bartolomeoságа alebo seba a potom už Dorot vedel, koho je tá ťava. Kto ju stratil, ak každý z nich vždy buď klame, alebo vraví pravdu?

Riešenie:
Troch mužov si pre jednoduchosť označíme takto:

A–Anastažionne,
B–Bartolomeoság,
C–Catherinussios.

Keďže každý z nich hovorí buď stále pravdu alebo stále klame, môžu nastať 4 prípady:

1. neklame ani jeden z nich,
2. klame jeden z nich,
3. klamú dvaja z nich,
4. všetci traja klamú.

Postupne si tieto prípady rozoberieme.

1. V tomto prípade hovoria všetci traja pravdu. To ale znamená, že pravdu hovorí aj *C*, ktorý tvrdí, že aspoň dvaja z nich klamú. Tieto dve tvrdenia si navzájom odporujú, preto takýto prípad nemôže nastať.

2. V tomto prípade klame jeden z nich. *C* tvrdí, že klamú aspoň dvaja. Tieto výroky si navzájom odporujú, teda klamať musí *C*. Z toho vyplýva, že *A* a *B* hovoria pravdu. Keďže *A* tvrdí, že ťava patrí *C* a vieme, že *A* vraví pravdu, majiteľom ťavy je *C*. Ľahko vieme overiť, že *B* vraví tiež pravdu, pretože ťava naozaj nie je jeho. Teraz si už vieme domyslieť, čo odpovedal *C* na Dorotissimovu druhú otázku – komu patrí ťava. Keďže stále klame, mohol odpovedať dvoma spôsobmi, buď že majiteľom je *A* alebo *B*.

3. Ak klamú dvaja z nich, *C* hovorí pravdu, pretože aspoň dvaja naozaj klamú. Z toho vyplýva, že *A* aj *B* klamú. Keďže *B* tvrdí, že ťava nie je jeho a vieme, že klame, je to jasné – ťava patrí *B*. Vidíme, že aj *A* naozaj klame, keďže v tomto prípade ťava nepatrí *C*. Opäť sa zamyslime nad tým, čo mohol *C* odpovedať Dorotissimovi na druhú otázku. Keďže stále vraví pravdu, odpovedal, že ťava patrí *B*.

4. Ak klamú všetci traja, výrok *C* je pravdivý, lebo klamú aspoň dvaja. *C* teda nemôže klamať – tieto tvrdenia si ale navzájom odporujú, preto tento prípad nemôže nastať.

Teraz sa opäť zamyslime nad tým, čo mohol *C* odpovedať na druhú otázku. Sú len dve možnosti – odpovedal buď *A* (ak nastal 2. prípad) alebo *B* (v 2. aj 3. prípade). Odôvodnili sme si, prečo 1. a 4. prípad nastať nemôže. Ak bola jeho odpoveď *A* (2. prípad), majiteľom ťavy je *C*. Ak bola odpoveď *B*, majiteľom môže byť *B* (3. prípad) aj *C* (2. prípad), nevieme to jednoznačne určiť. Ale Dorotissimo po tejto otázke vedel jednoznačne určiť, komu ťava patrí, teda je to jasné – odpoveď musela byť *A*. Takže majiteľom ťavy je Catherinussios.

Komentár:
Veľa z vás dobre zistilo, komu patrí ťava ak C hovorí pravdu a komu, ak C klame. No najťažšie bolo využiť podmienku, že D po otázke už vedel, komu ťava patrí. Dúfame, že keď ste to nevedeli, tak nabudúce si už s takou úlohou poradíte. A tiež čítajte pozorne zadanie, lebo sa vyskytli prípady, že bolo zadanie interpretované trocha inak.

3 opravovali **Tina Jesenská** a **Matúš Stehlík**
najkrajšie riešenia: Jakub Genči, Dávid Nguyen

44 riešení

Zadanie:
Keďže nevesta mala veľmi rada symetrické veci, všetky stoly boli označené symetrickými štvorcifernými číslami (použila pri tom všetky takéto čísla). Keď sa Dorotissimo chcel usadiť, zistil, že voľno je už len pri stoloch, ktoré sú deliteľné 77. Ku ktorým všetkým stolom si mohol Dorot sadnúť? (Symetrické číslo je také, ktoré sa číta rovnako sprava aj zľava, napr. 1221 je symetrické číslo.)

Riešenie:
Nech $\overline{abba}$ je nejaké štvorciferné symetrické číslo, kde a, b sú cifry. Číslo $\overline{abba}$ rozpíšeme v desiatkovom zápise

$$\overline{abba} = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b.$$

Pozrime sa na to, kedy je toto číslo deliteľné 77. Od a to závisieť nebude, lebo $1001a = 77 \cdot 13a$ je deliteľné 77, preto a môže byť ľubovoľná cifra. Ak chceme, aby bol súčet $1001a + 110b$ deliteľný 77 a vieme, že $1001a$ je deliteľné 77, tak potom aj $110b$ musí byť deliteľné 77. Preto 77 delí $\overline{abba}$ práve vtedy, keď 77 delí aj $110b$ (♣).
Pre deliteľnosť 77 je potrebné, aby bolo číslo deliteľné 11 a 7 zároveň. Deliteľnosť 11 je jasná, lebo $110b/11 = 10b$. Aby sme dosiahli deliteľnosť 7, musí byť b deliteľné 7 (lebo 110 a 7 sú nesúdeliteľné), preto b je buď 0 alebo 7. Teda vieme, že vyhovujú len čísla $\overline{abba}$, kde $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ a $b \in \{0, 7\}$. Týchto čísel je 18, ak ich chceme vypísať všetky, tak sú to

$$1001,\ 1771,\ 2002,\ 2772,\ 3003,\ 3773,\ 4004,\ 4774,\ 5005,$$

$$5775,\ 6006,\ 6776,\ 7007,\ 7777,\ 8008,\ 8778,\ 9009,\ 9779.$$

To, že vyhovujú a sú jediné vyplýva z postupu, akým sme ich našli.

Komentár:
Úloha nebola ťažká, viacerým z vás sa podarilo nájsť správne riešenie. Keďže štvorciferných symetrických čísel je len 90, k výsledku sa dalo dopracovať aj odskúšaním všetkých možností. No treba si dať pozor, lebo pri veľa možnostiach je väčšia šanca sa pomýliť alebo na niečo zabudnúť.

Niekedy je lepšie najprv úlohu zjednodušiť a potom odskúšať všetky zostávajúce možnosti. Tak sme to mohli urobiť v mieste označenom (♣). Stačilo vyskúšať 10 možných b.
Mnoho riešení stroskotalo na tom, že po odskúšaní prvých pár čísel bolo jasné, ako to bude pokračovať. Lenže nie vždy to tak musí byť a pokiaľ nie je uvedený žiaden dobrý argument, prečo by to tak malo byť a prečo sa tam nemôže nájsť už nič iné, čo by pokazilo tú prekrásnu postupnosť, tak riešenie nie je úplné.

4

opravovali **Robko Hajduk, Katka Krajčiová** a **Dorka Jarošová** — 33 riešení

najkrajšie riešenie: Peter Onduš, Samuel Krajči

Zadanie:

Losátor si zapísal výherné čísla na papier, no nešikovný čašník mu ho polial ružovým detským šampanským. Našťastie Dorotissimo, ktorý nemal lístok na tombolu, nemal čo robiť, a tak medzičasom stihol zapísať na servítku súčty všetkých dvojíc vylosovaných čísel. Na servítku si zapísal $0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15$. Ktorých 5 čísel bolo vyžrebovaných? (Tombolové čísla môžu byť aj záporné.) Mohlo sa stať, že by si Dorot takto zapísal na servítku nasledujúcich 10 čísel: 12, 13, 14, 15, 16, 16, 17, 17, 18, 20? Svoje riešenie zdôvodnite.

Riešenie:

Časť a:) Pre riešenie úlohy vyžrebované čísla zoradím od najmenšieho po najväčšie. Žiadne dve vyžrebované čísla nemohli byť rovnako veľké, keďže to sú lístky v tombole. V súčtoch všetkých dvojíc vyžrebovaných čísel sa nachádza každé číslo z tomboly práve 4-krát, pretože Dorot ho zarátal do dvojice s každým z ostatných vyžrebovaných čísel. Ak všetky tieto čísla napísané na servítke sčítame a predelíme štyrmi, získame súčet čísel, ktorý je $72/4 = 18$.
Súčet prvých dvoch čísel je určite najmenší zo všetkých súčtov napísaných na servítke, pretože sú to dve najmenšie možné čísla, čiže je to 0. Podobne môžeme túto úvahu aplikovať na dve najväčšie čísla na servítke, ktorých súčet je 15.
Teraz poznáme súčet dvoch najmenších, dvoch najväčších aj všetkých piatich čísel. Zostávajúce „prostredné“ (teda tretie najmenšie a aj tretie najväčšie) číslo je potom $18 - 0 - 15 = 3$.
Súčet najmenšieho a prostredného čísla musí byť druhý najmenší, keďže od neho je menší (alebo rovný) iba súčet najmenších dvoch čísel. Tento súčet je teda podľa zadania 2, čiže najmenšie číslo je $2 - 3 = -1$. Keď už máme najmenšie číslo, ľahko dopočítame druhé najmenšie: $0 - (-1) = 1$.
Podobne ako predtým vieme, že súčet prostredného a najväčšieho čísla je druhý najväčší (od neho je väčší alebo rovný iba súčet najväčších dvoch). Najväčšie číslo je tým pádom $13 - 3 = 10$. Ostáva nám len určiť druhé najväčšie číslo. O ňom však vieme, že v súčte s číslom najväčším dáva 15, čiže to musí byť $15 - 10 = 5$.
Ak zo získaných čísel spravíme súčty po dvojiciach, ako to spravil Dorot, zistíme, že máme všetky súčty zo zadania.
Vyžrebované čísla tomboly sú: $-1, 1, 3, 5, 10$.

Iné riešenie časti a:) Úlohu riešime rovnako, len zavedieme premenné na označenie jednotlivých čísel.
Označme vyžrebované čísla a, b, c, d a e a predpokladajme, že sú zoradené od najmenšieho po najväčšie ($a < b < c < d < e$). Žiadne dve čísla nemohli byť rovnako veľké, keďže to sú lístky v tombole. V súčtoch všetkých dvojíc vyžrebovaných čísel sa nachádza každé číslo z tomboly práve 4-krát, pretože Dorot ho zarátal do dvojice s každým z ostatných vyžrebovaných čísel. Ak všetky tieto čísla napísané na servítke sčítame a predelíme štyrmi, získame súčet čísel a, b, c, d, e:

$$a + b + c + d + e = 72/4 = 18.$$

Súčet $a+b$ bude určite najmenší zo všetkých súčtov napísaných na servítke, pretože sú to dve najmenšie možné čísla ($a + b = 0$). Rovnako platí, že $a + c$ bude druhý najmenší súčet, teda $a + c = 2$. Podobne môžeme túto úvahu aplikovať na dve najväčšie čísla na servítke, a teda $e + d = 15$ a $c + e = 13$.
Teraz poznáme súčet $a + b = 0$, $e + d = 15$ a aj $a + b + c + d + e = 18$. Pomocou odčítania prvých dvoch rovníc od tretej získame:

$$c = (a + b + c + d + e) - (a + b) - (e + d) = 18 - 0 - 15 = 3.$$

Keď poznáme c, vieme pomocou vzťahov $a + c = 2$ a $e + c = 13$ zistiť, že $e = 13 - c = 10$ a $a = 2 - c = -1$. Získané výsledky dosadíme do rovníc $a + b = 0$ a $e + d = 15$ a dopočítame tak zvyšné čísla tomboly:

$$b = 0 - a = 1$$

$$d = 15 - e = 5.$$

Vyžrebované čísla tomboly sú: -1, 1, 3, 5, 10.
Časť b:)
Druhú časť úlohy začneme riešiť podobne ako prvú, a to zistením súčtu vyžrebovaných čísel (tentoraz sú to ale úplne nové čísla, vôbec nesúvisiace s tými v prvej časti úlohy). Už vieme, ako tento súčet zistiť. Je to súčet všetkých dvojíc napísaných na servítke, ale keďže sa v tomto súčte nachádza každé z čísel z tomboly práve štyrikrát, predelíme ho štyrmi. Ich súčet je teda $158/4 = 39{,}5$. Keďže ale všetky čísla v tombole sú celé, nedokážeme ich súčtom získať desatinné číslo, čiže Dorotissimo si nemohol na servítku napísať týchto 10 čísel.

Komentár:

Prvú časť úlohy vyriešil každý, kto sa do riešenia pustil. Žiaľ, v niektorých prípadoch šlo len o tip na výsledok formou: „Ak súčet najmenších dvoch čísel je nula, tak to budú čísla -1 a 1.“ Táto úvaha je však nepresná a vôbec nedokazuje, že nemôže byť aj iné riešenie. Nulu je možné rozložiť viacerými spôsobmi na súčet dvoch celých čísel a rozklad na -1 a 1 je len jeden z nich. Bolo potrebné poriadne zdôvodniť, prečo je jediný vyhovujúci. V druhej časti ste niektorí z vás použili spôsob riešenia vami využitý v prvej časti. To malo za následok to, že ste nerozobrali všetky možnosti, a tým bolo vaše riešenie nekompletné.

5 opravovali **Janka Baranová** a **Dano Till**

najkrajšie riešenie: Katka Kuľková

41 riešení

Zadanie:

V lichobežníku $ABCD$ (so základňami AB a CD) platí, že dvojnásobok veľkosti uhla ABC je veľkosť uhla CDA. Veľkosť strany CD je 30 metrov a veľkosť strany DA je 50 metrov. Aká je veľkosť strany AB, popri ktorej chcú hádzať svadobčania tanier?

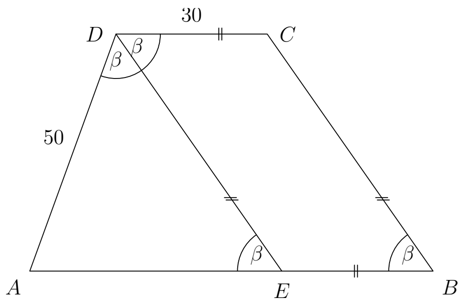
Riešenie:

V geometrickej úlohe je na začiatku dobré nakresliť si pekný veľký obrázok a vhodne pomenovať uhly, body, ... (aby to bolo čo najjednoduchšie a najprehľadnejšie).

Zhrnieme si, čo všetko vieme zo zadania a zakreslíme to do obrázka – $ABCD$ je lichobežník (štvoruholník, ktorého dve protiľahlé strany AB a CD sú rovnobežné), pričom $|CD| = 30$, $|AD| = 50$ (všetky uvádzané dĺžky v tomto vzorovom riešení sú v metroch) a $2 \cdot |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CDA|$. Označme $|\sphericalangle ABC| = \beta$. Na základe zadania vieme, že $|\sphericalangle CDA| = 2\beta$. Riešenia sa odvíjali dvomi smermi, oba však využívali dokreslenie nejakých čiar a dvojice zhodných uhlov.

Riešenie 1:

Zostrojme rovnobežku s priamkou BC prechádzajúcu bodom D. Bod, v ktorom nám táto rovnobežka pretne úsečku AB označme E. Teraz tu máme štvoruholník $EBCD$ a trojuholník AED. Pozrieme sa bližšie na štvoruholník $EBCD$. Vieme, že strany BC a ED sú rovnobežné (kvôli nášmu zostrojeniu bodu E). Ďalej ešte vieme, že aj EB a DC sú rovnobežné (lebo $ABCD$ je lichobežník a bod E leží na strane AB).

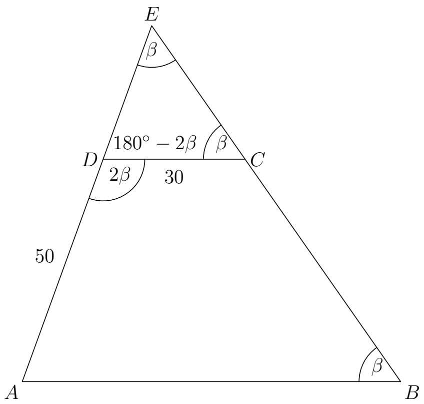


Zistili sme, že v štvoruholníku $EBCD$ sú dvojice protiľahlých strán rovnobežné, teda je to rovnobežník. O rovnobežníku vieme, že veľkosti jeho protiľahlých strán a uhlov sú rovnaké. Z toho teda vyplýva, že $|\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle EBC| = \beta$ a $|BE| = |CD| = 30$. Teraz sa pozrime na trojuholník AED – keďže $|\sphericalangle CDA| = 2\beta$ a $|\sphericalangle CDE| = \beta$, tak $|\sphericalangle EDA| = |\sphericalangle CDA| - |\sphericalangle CDE| = \beta$.

Ako posledné zistíme veľkosť uhla DEA. Priamky CB a DE sú rovnobežky preťaté rôznobežkou AE, preto $|\sphericalangle DEA| = |\sphericalangle CBE| = \beta$ – súhlasné uhly. Môžeme si teraz z obrázku všimnúť, že trojuholník *AED* je rovnoramenný so základňou *DE*, pretože $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle AED| = \beta$. V tomto trojuholníku vieme, že dĺžka ramena *DA* je 50, takže aj dĺžka ramena *EA* bude 50. Potom vidíme, že $|AB| = |AE| + |EB| = 50 + 30 = 80$ metrov.

Riešenie 2:

Predĺžme polpriamky *AD* a *BC*. Bod, v ktorom sa pretnú označme *E*. Týmto nám vznikli dva trojuholníky – *ABE* a *DCE*. Keďže v lichobežníku platí, že základne sú rovnobežné, tak máme priamky *AB* a *DC* rovnobežky preťaté rôznobežkou *BE* (*BC*), teda $|\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle ABC| = \beta$ – súhlasné uhly.



Ďalej uhly *CDA* a *CDE* sú susedné, preto ich súčet je 180°. Z toho už ľahko vieme vypočítať $|\sphericalangle CDE| = 180° - |\sphericalangle CDA| = 180° - 2\beta$. Teraz sa pozrime na trojuholník *DCE*. V trojuholníku platí, že súčet vnútorných uhlov je 180° a my v tomto trojuholníku poznáme dva z vnútorných uhlov. Vypočítame tretí:

$$|\sphericalangle CED| = 180° - |\sphericalangle CDE| - |\sphericalangle DCE| = \beta$$

Všimnime si, že v trojuholníku *DCE* sú uhly *CED* a *DCE* rovnako veľké. Z toho vyplýva, že tento trojuholník je rovnoramenný so základňou *CE*. Keďže rameno *CD* je dlhé 30, tak 30 bude mať aj rameno *ED*. Teraz sa pozrime na trojuholník *ABE*. V tomto trojuholníku sú tiež dva uhly rovnako veľké – uhly *ABE* a *BEA*, takže aj tento trojuholník je rovnoramenný so základňou *BE*. Rameno *EA* v tomto trojuholníku má dĺžku $|EA| = |DA| + |ED| = 50 + 30 = 80$. Keďže rameno *EA* je dlhé 80, tak aj rameno *AB* bude dlhé 80 metrov.

Komentár:

Túto úlohu bolo možné riešiť viacerými spôsobmi a väčšina z vás ju vyriešila úspešne, avšak ste pomerne často nedostatočne vysvetľovali svoje postupy, napríklad to, ako ste zistili niektorý uhol alebo prečo je os uhla *ADC* rovnobežná s úsečkou *BC*. Nabudúce si dajte pozor na správny zápis veľkostí uhlov alebo zlé pomenovania uhlov.

Niektorí z vás rozobrali iba konkrétny prípad lichobežníka (napr. rovnoramenný alebo pravouhlý) a neuvedomili si, že riešenie môže byť aj vo „všeobecnom“

lichobežníku, respektíve ste si mylne mysleli, že táto úloha má riešenie iba ak poznáme veľkosť uhla *ABC*, čo nie je pravda. Inak nás veľmi milo prekvapilo množstvo správnych riešení.

6

opravovali **Maťo Rapavý** a **Robčo Tóth** 37 riešení

najkrajšie riešenia: Zoltán Hanesz, Žaneta Semanišinová

Zadanie:

Ženích a nevesta hrali nasledovnú hru: Na začiatku na papier napísali číslo 42. Ženích od čísla na papieri (teraz 42) odčítal ľubovoľného deliteľa tohto čísla, výsledok napísal a škrtol číslo, ktoré bolo napísané predtým. Nevesta to urobila s číslom, ktoré ostalo na papieri neškrtnuté, a tak ďalej... V ťahoch sa striedajú. Ten, kto napíše na papier číslo 0, prehráva. Pre koho z nich existuje víťazná stratégia a aká? Ako to dopadne pri druhej hre, keď tentoraz napísali na papier na začiatku číslo 25? (Víťazná stratégia je návod, ktorý jednému z nich zabezpečí výhru bez ohľadu na to, ako hrá ten druhý.)

Riešenie:

V úlohách tohto typu sa treba snažiť odhaliť niečo, čo vás dovedie k víťazstvu zväčša bez ohľadu na to, čo robí váš súper. Je fajn vyskúšať si na začiatok symetrické ťahy, alebo podobné úplne jednoduché stratégie a odpozorovať na nich nejaké veci. Ďalej sa dá postupovať od konca hry smerom k jej začiatku a niekedy sa jednoducho dajú vypísať všetky herné situácie. Keď si túto hru niekoľko-krát zahráme, odpozorujeme, že v tejto úlohe má dôležitú úlohu párnosť respektíve nepárnosť čísel. Teraz si ukážeme ako mohlo vaše riešenie vyzerať.

Nepárne čísla majú len nepárnych deliteľov. Teda ak máme napísané nepárne číslo, po odčítaní nepárneho deliteľa nám ostane párne číslo. Párne čísla majú aj párnych aj nepárnych deliteľov, teda po odčítaní vieme dostať aj párne aj nepárne číslo. Nula je párne číslo. Víťazná stratégia potom vyzerá nasledovne – hráč, ktorý má pred sebou párne číslo, od neho odpočíta jeho nepárneho deliteľa, napríklad 1, ktorá delí každé číslo. Druhému hráčovi potom ostane nepárne číslo, z ktorého vie urobiť len párne číslo. Ako vidíme, prvý hráč vždy napíše nepárne číslo, druhý hráč vždy párne a keďže nula je párna, tak ju môže takýmto spôsobom napísať jedine druhý hráč, teda prehrá. Pre naše konkrétne situácie to znamená, že ak je na začiatku číslo 42, vyhrá ženích, keďže on píše nepárne čísla a ak je na začiatku číslo 25, vyhrá nevesta, keďže ženích píše párne čísla.

Komentár:

Úloha ťažká nebola, o čom svedčí aj počet deväťbodových riešení. Väčšine z vás sa stratégiu objaviť podarilo, no horšie to už bolo s vysvetlením, prečo funguje. Dva body šli dole, ak ste neukázali, že prvý hráč bude môcť vždy odčítať nepárneho deliteľa, teda že vždy nejaký bude existovať. Dva body sme strhli, aj keď ste neukázali, ako sa správa rozdiel čísel a ich deliteľov a v riešení ste to ticho využívali.

Zadania 2. série úloh

Úlohy pošlite najneskôr **30.apríla 2012**

Tieto úlohy aj s príbehom nájdete na stránke matik.strom.sk/zadania.php, alebo v minulom čísle vášho časopisu.

Úloha 1. *Keď sa Dorotissima opýtali, koľko ťavích bobkov v ten deň predal, odpovedal takto: „Môj prvý zákazník povedal, že kúpi polovicu všetkých bobkov, čo mám na predaj, a ešte k tomu pol bobku. To isté povedali i ďalší traja zákazníci, ktorí u mňa dnes ešte nakupovali. Keď som obslúžil štvrtého zákazníka, mal som vypredané a za celý deň som nemusel rozkrojiť ani jeden bobek.“ Koľko bobkov predal?*

Úloha 2. *V krajine Fantasmagórie sa číslo domu vyrátavalo ako veľkosť horného obyvateľa domu, delené veľkosť dolného obyvateľa. Na hornom poschodí žil pán, ktorý obľuboval čítanie kníh a preto ho nazývali Čitateľom. Na dolnom poschodí žil zase pán, za ktorým ľudia chodili, keď chceli meno pre svoje dieťa. Nazývali ho Menovateľom. Čitateľ aj Menovateľ Zlomku (tak sa nazýval ich dom) sú prirodzené čísla, Menovateľ je o 3 väčší než Čitateľ. Ak zväčšíme Čitateľa aj Menovateľa o 1, bude číslo Zlomku väčšie ako jedna tretina. Ak zmenšíme Čitateľa aj Menovateľa o 1, bude číslo Zlomku menšie ako jedna tretina. Aké je pôvodné číslo domu?*

Úloha 3. *Na lúke sa páslo 10 gigantických lienok, pričom na sebe mali bodky od jedna až po desať (každá z nich mala na sebe iný počet bodiek). Na papieriku s inštrukciami stálo: Po obvode kruhu rozmiestni lienky tak, aby súčet bodiek na ľubovoľných dvoch susedných lienkach nebol deliteľný ani 3, ani 5, ani 7. Dajú sa takéto inštrukcie splniť? Ak áno, nájdite všetky možnosti, ak nie, zdôvodnite prečo.*

Úloha 4. *Manželia zistili, že porota ohodnotila 7 lienok počtom bodov 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81 tak, že každé z nich použili len raz, a potom ich postavili do radu. No keďže v krajine Fantasmagórie sa víťazi neusporiadali postupne, manželia nevedeli zistiť, ktorá lienka skončila ktorá. Koľkými spôsobmi mohlo byť 7 lienok zoradených, ak vieme, že súčet bodov každých 4 za sebou idúcich lienok je deliteľný tromi?*

Úloha 5. *Ich novonadobudnutý pozemok mal tvar lichobežníka. Základne tohto lichobežníka ABCD majú dĺžku:* $|AB| = 6\,cm$, $|CD| = 4\,cm$. *Nájdite dĺžku úsečky YZ vyťatej uhlopriečkami AC, BD na úsečke XQ, kde X je stredom AD a Q je stredom BC.*

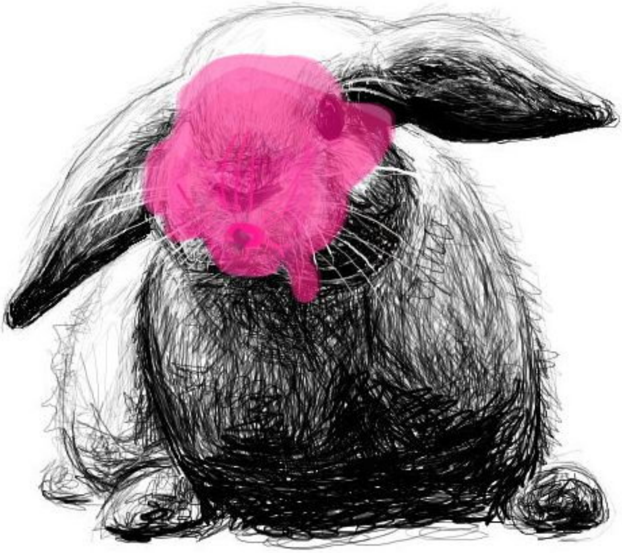
Úloha 6. *Počas návštevy si zasadli za okrúhly stôl členovia dvoch znepriatelených rodín. Ukázalo sa, že počet návštevníkov, ktorí majú po pravej strane nepriateľa (člena z druhej rodiny), sa rovná počtu návštevníkov, ktorí majú po pravej strane spojenca (člena vlastnej rodiny). Dokážte, že celkový počet návštevníkov je vždy deliteľný číslom 4, pričom neviete, koľko presne ich tam bolo.*

Poradie po 1.sérii

PS je súčet bodov za predchádzajúce série, **1–6** sú body za jednotlivé úlohy a **CS** je celkový súčet bodov.

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	PCS
1. – 3.	Šimon Soták	Kvarta A	GAlejKE	0	9	9	9	9	9	9	54
	Kristína Bratková	7. A	ZKe30KE	0	9	9	9	9	-	9	54
	Martin Masrna	7. A	ZKro4KE	0	9	9	3	9	9	9	54
4. – 6.	Kristína Mišlanová	Kvarta A	GAlejKE	0	8	9	9	9	9	9	53
	Samuel Krajči	Prima	GAlejKE	0	9	9	9	9	8	8	53
	Žaneta Semanišinová	Kvarta A	GAlejKE	0	9	8	9	9	9	9	53
7. – 8.	Peter Onduš	Sekunda A	GAlejKE	0	8	9	8	9	7	9	52
	Juraj Mičko	8. B	ZKro4KE	0	7	9	9	9	8	9	52
9. – 12.	Katarína Kuľková	7. A	ZSDrienov	0	9	5	5	9	9	9	50
	Dávid Nguyen	Kvarta A	GAlejKE	0	9	6	9	8	9	9	50
	Daniel Onduš	Kvarta A	GTr12KE	0	7	9	8	8	9	9	50
	Natália Česánková	7. A	ZHvieLY	0	9	6	9	8	9	2	50
13. – 14.	Michal Ščur	9. B	ZVinbBJ	0	7	7	9	9	8	9	49
	Jakub Čopák	9. B	ZVinbBJ	0	7	7	9	9	8	9	49
15.	Zoltán Hanesz	8. A	ZKuzmKE	0	9	6	9	4	9	9	48
16. – 18.	Petra Plšková	9. A	ZStarKE	0	9	9	8	9	3	9	47
	Jakub Genči	8. A	ZKro4KE	0	9	9	9	6	8	5	47
	Martin Spišák	Sekunda A	GAlejKE	0	9	6	9	5	9	5	47
19. – 20.	Slavomír Hanzely	Kvarta	GKomeSB	0	7	6	9	8	9	7	46
	Martin Majerčák	Kvarta A	GAlejKE	0	9	5	9	5	9	9	46
21.	Patrik Hohoš	Kvarta A	GAlejKE	0	7	6	9	5	9	9	45
22.	Soňa Feciskaninová	Kvarta A	GAlejKE	0	9	9	9	-	9	7	43
23. – 24.	Henrieta Micheľová	Kvarta A	GAlejKE	0	9	9	3	3	9	9	42
	Patrik Lenart	9. A	ZJPavlKE	0	9	6	9	6	8	4	42
25. – 27.	Tereza Volavková	9. A	ZKro4KE	0	9	5	9	4	2	9	38
	Matej Genči	7. A	ZKro4KE	0	9	6	3	3	8	3	38
	Lenka Kopfová	6. A	ZHradCZ	0	8	9	3	9	-	-	38
28. – 29.	Veronika Schmidtová	8. B	ZKro4KE	0	-	3	9	6	9	7	37
	Ján Michalov	Kvarta A	GAlejKE	0	6	4	5	7	8	7	37
30.	Tomáš Tóth	7. A	ZKro4KE	0	5	2	9	2	7	4	36
31.	Marek Koman	Sekunda A	GAlejKE	0	8	6	5	-	6	-	33
32. – 33.	Ivan Vanát	Kvarta A	GAlejKE	0	9	-	3	-	9	9	30

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	PCS
	Jakub Hlaváčik	Kvarta B	GAlejKE	0	6	-	9	-	8	7	30
34.	Adam Kalivoda	7. A	ZKro4KE	0	9	3	3	1	1	-	26
35.	Michal Čabra	7. B	ZŽdaňa	0	7	1	1	-	0	7	23
36.	Kamil Fedič	7. C	ZHrnčHÉ	0	2	5	3	3	3	2	21
37.	Diana Hlaváčová	Kvarta A	GAlejKE	0	7	3	3	2	3	2	20
38.	Peter Čulen	7. A	ZKro4KE	0	1	2	3	1	6	1	19
39.	Jakub Mach	8. B	ZKro4KE	0	-	9	-	-	8	-	17
40. – 41.	Nikola Svetozarov	7. B	ZKro4KE	0	-	5	3	-	3	-	16
	René Michal Cehlár	9. A	ZKro4KE	0	6	2	2	-	-	6	16
42.	Matúš Labuda	Kvarta A	GAlejKE	0	2	2	3	-	0	3	10
43.	Bohuš Staško	7. A	ZKro4KE	0	2	-	3	-	1	-	9
44. – 45.	Petra Demjanovičová	8. A	ZBajkPO	0	2	-	4	-	-	-	6
	Kamil Krajč	Sekunda A	GTr12KE	0	0	-	3	-	0	-	6



Za podporu a spoluprácu ďakujeme:

Korešpondenčný matematický seminár **MATIK**
Číslo 5 • Letná časť 25. ročníka (2011/12) • Vychádza 2. apríla 2012
Internet: `http://matik.strom.sk` • E-mail: `matik@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1
Internet: `http://www.strom.sk` • E-mail: `zdruzenie@strom.sk`