KOREŠPONDENČNÝ MATEMATICKÝ SEMINÁR

MATIK

ČÍSLO **5** — ROČNÍK **24** INTERNET http://matik.strom.sk

Čaute matici!

Ani ste sa nenazdali a už držíte v rukách ďalšie zadania príkladov Matika. Zaujíma vás pokračovanie napínavého príbehu či poradie? Nájdete tu jedno aj druhé a ešte zopár príkladíkov, ktoré snáď zvládnete ľavou zadnou! Tak nestrácajte čas a s chuťou sa pustite do poslednej šestice úloh. Áno, čítate správne, ak ste si to nestihli uvedomiť, je to vaša posledná šanca nachytať nejaké bodíky a zlepšiť si umiestnenie. Tých najlepších predsa čaká sústredko, na ktoré do smrti nezabudnete! (o to sa už postaráme :-))

Vaši vedúci MATIKa

Ako bolo

„Vitajte na palube vesmírnej lode. Smerujeme do inej galaxie.“ Jedny z prvých slov, ktoré sa dostali do uší tých vyvolených z vás, ktorí mali príležitosť zúčastniť sa na zimnom sústredení MATIKa v Rejdovej. Hneď po vylodení museli zvládnuť zákerný vstupný test, a keďže boli všetci úspešní, po rozdelení do troch družiniek dostali bažanti prvú neľahkú úlohu – zistiť dôvod náhlej zmeny kapitánovho správania.

Počas druhého dňa sa však začali diať podivné veci. Akoby sa nie všetci snažili o dobro a víťazstvo svojej družinky. Pravda vyšla napovrch až večer, keď sa zo skupiniek vyčlenili záškodníci, Sithi. Všetko bolo zrazu jasné. Tri Jediovske družinky sa spojili a spoločnými silami v rôznych súťažiach bojovali proti Sithom. Po pár úžasne prežitých dňoch však Jediovia dobili sithský chrám a zlákala ich zlá sila. Nakoniec ostala už len hŕstka tých dobrých – vedúcich. Nepodarilo sa im však vyhrať, a tak po dlhom čase dobro nezvíťazilo nad zlom :-). Ak vás toto sústredenie zaujalo, aj Vy máte šancu zažiť to ďalšie. Uskutoční sa 19.–24. júna v RS Mníchovský potok pri Bardejove. Tak šup šup rátajte, kým je ten náš-váš nový MATIK ešte teplý.

Vaši vedúci MATIKa

Ako bude

Pokiaľ si minulým, terajším či budúcim riešiteľom MATIKa, alebo si len tak listuješ tento časopis, tak sa práve tebe naskytuje príležitosť stráviť prekrásny deň s tvojimi kamarátmi a vedúcimi na MATIKovskom výlete.

Ak ťa táto dlhá veta oslovila, tak príď v sobotu 16.4.2011 o 8:20 na Železničnú stanicu do Košíc. Pôjdeme vlakom do Kysaku, odkiaľ sa vydáme na Jánošíkovu baštu, kde sa pokocháme prekrásnym výhľadom. Našu cestu ukončíme vo Veľkej Lodine. Predpokladaný príchod do Košíc je o 15:46 (ďalší vlak dorazí o 17:29).

Na seba a do ruksaku si zober: športové oblečenie, pevnú obuv, preukaz na zľavu na vlak, šatku, jedlo, pitie, peniaze na cestu (plné cestovné by nemalo prevýšiť 2 eurá, s preukážkou je to polovica) a kopec dobrej nálady. Určite neseď doma, ale príď a zabav sa! Tešíme sa na teba :).

Vzorové riešenia 1. série úloh

1 opravovali **Miro Stankovič**, **Dano Till** a **Tomáš Babej**
najkrajšie riešenie: Diana Hlaváčová

42 riešení

Zadanie
Kráľ rozdelil svoju zbierku - 45 diamantov - do 4 mešcov tak, že keby sa do prvého pridali 2 diamanty, z druhého sa odobrali 2 diamanty, z tretieho sa odobrala polovica a do štvrtého sa pridalo raz toľko diamantov, ako tam bolo pôvodne, vo všetkých mešcoch by bol rovnaký počet diamantov. Ako kráľ diamanty rozdelil?

Vzorové riešenie
Vieme, že kráľ mal na začiatku dokopy 45 diamantov a potrebujeme zistiť, koľko ich bolo v jednotlivých mešcoch. Uvedomme si, že celkový počet diamantov sa po kráľových úpravách mohol zmeniť. Keďže po kráľových úpravách bolo vo všetkých mešcoch rovnako veľa diamantov, bude celkom fajn, ak budeme postupovať odzadu. Bohužiaľ, my nepoznáme po koľko diamantov sa mu zvýšilo, avšak môžeme uvažovať všeobecne a označiť tento počet x. Vieme teda, že na konci mal kráľ v každom mešci x diamantov.
Pozrime sa teraz na to, koľko diamantov bolo v jednotlivých mešcoch na začiatku:

- 1. mešec: Po pridaní dvoch diamantov dostaneme x diamantov. Pôvodne ich tam teda bolo o dva menej, čiže $x - 2$ diamantov.
- 2. mešec: Po odobratí dvoch diamantov dostaneme x diamantov. Pôvodne ich tam teda bolo o dva viac, čiže $x + 2$ diamantov.
- 3. mešec: Po odobratí polovice pôvodného počtu diamantov dostaneme x diamantov. Pôvodne ich tam teda bolo dvakrát viac, čiže $2 \cdot x$ diamantov.
- 4. mešec: Po pridaní polovice pôvodného počtu diamantov dostaneme x diamantov. Pôvodne ich tam teda bolo dvakrát menej, čiže $\frac{x}{2}$ diamantov.

Dokopy v týchto mešcoch je $(x - 2) + (x + 2) + 2 \cdot x + \frac{x}{2}$ diamantov, čo má byť podľa zadania 45 diamantov. Tým pádom dostávame jednoduchú rovnicu:

$$(x - 2) + (x + 2) + 2 \cdot x + \frac{x}{2} = 45$$

$$4 \cdot x + \frac{x}{2} = 45$$

$$4{,}5 \cdot x = 45$$

$$x = 10$$

Zistili sme teda, že na konci bolo v každom mešci 10 diamantov. Počty diamantov na začiatku dostaneme tak, že v predchádzajúcich úvahách nahradíme x číslom 10:

- 1. mešec: Bolo v ňom $x - 2 = 10 - 2 = 8$ diamantov.
- 2. mešec: Bolo v ňom $x + 2 = 10 + 2 = 12$ diamantov.
- 3. mešec: Bolo v ňom $2 \cdot x = 2 \cdot 10 = 20$ diamantov.
- 4. mešec: Bolo v ňom $\frac{x}{2} = \frac{10}{2} = 5$ diamantov.

Tak a máme to. Skôr, ako sa však celí spokojní pustíme do ďalšej úlohy, nezabudneme si naše výsledky skontrolovať skúškou správnosti:
Súčet diamantov v mešcoch na začiatku je $8 + 12 + 20 + 5 = 45$. Super! A čo kráľove čachre-machre?

$$10 = 8 + 2 = 12 - 2 = \frac{20}{2} = 5 \cdot 2$$

V každom mešci je na konci rovnaký počet diamantov, teda naše riešenie je naozaj správne :-).

2 opravovali **Ivka Gašková** a **Maťo Rapavý**

najkrajšie riešenia: Richard Husár, Kristína Mišlanová

53 riešení

Zadanie

Kráľovi traja synovia sa rozhodli rozdeliť stádo nasledovne: najstarší dostane polovicu, prostredný tretinu a najmladší devätinu. To, čo im zostane dostane ten, kto pomáhal pri delení. V stáde bol ale taký počet jednorožcov, ktorý nebol deliteľný dvoma, tromi ani deviatimi. Našťastie sa im pustovník z hôr ponúkol, že im jedného jednorožca dá a tým vyriešil ich problém pri delení stáda. Keď sa rozdelili, zostal im práve jeden jednorožec a toho vrátili pustovníkovi, pretože im pomohol s delením. Koľko divokých jednorožcov bolo v stáde?

Vzorové riešenie

Riešenie 1: Zo zadania vieme, že polovicu stáda dostane najstarší syn, tretinu prostredný, devätinu najmladší a to, čo zvýši, dostane ten, kto pomáhal pri delení. Pod stádom odteraz budeme rozumieť pôvodné stádo spolu s tým jedným pustovníkovým jednorožcom. Najprv zistíme, akú časť stáda dostane pomocník. Synovia si rozdelia dohromady

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{9 + 6 + 2}{18} = \frac{17}{18}$$

stáda, čiže zvyšok, ktorý dostane pomocník je $1 - \frac{17}{18} = \frac{1}{18}$. Zo zadania ďalej vieme, že pustovník dostal jedného jednorožca, čo má byť osemnástina stáda. Z toho

vyplýva, že stádo aj s pustovníkovým jednorožcom má $18 \cdot 1 = 18$ jednorožcov, teda pôvodné stádo má 17 jednorožcov.
Riešenie 2:
Počet jednorožcov v celom stáde aj s pustovníkovým jednorožcom označme x. Rozdelenie potom vyzerá nasledujúco: najstarší syn dostane $\frac{x}{2}$ jednorožcov, prostredný $\frac{x}{3}$, najmladší $\frac{x}{9}$ a ešte ostane jeden pustovníkov jednorožec. Zapíšem to do rovnice a vypočítajme x:

$$x - \frac{x}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{9} = 1$$

$$18x - 9x - 6x - 2x = 18$$

$$x = 18$$

Vypočítali sme teda, že počet jednorožcov aj s pustovníkovým jednorožcom je 18, čiže v pôvodnom stáde je 17 jednorožcov.
Tu je potrebné uvedomiť si, že riešenie, ktoré sme našli, nemusí vôbec vyhovovať zadaniu úlohy. Nemáme totiž zaručené, že pri tomto výsledku bude tá polovica (resp. tretina, resp. devätina) stáda prirodzené číslo. Pri oboch týchto riešeniach je teda potrebné urobiť skúšku správnosti:
Máme 17 jednorožcov (naše stádo nie je deliteľné 2, 3 ani 9). Ak dostaneme jedného jednorožca od pustovníka, tak stádo bude mať 18 jednorožcov. Najstarší syn potom dostane $\frac{18}{2} = 9$ jednorožcov, prostredný $\frac{18}{3} = 6$ jednorožcov, najmladší $\frac{18}{9} = 2$ jednorožcov a pomocník jedného jednorožca. Dokopy je to $9 + 6 + 2 + 1 = 17$ jednorožcov, čiže naše riešenie je správne.

Komentár. Táto úloha vyzerá na prvý pohľad veľmi jednoducho. Mali sme mnoho skutočne pekných riešení, no veľa z vás sa vydalo aj cestou kamenistou, a to bolo skúšanie. Pri skúšaní treba vždy ukázať, že ste našli všetky riešenia, čiže to, že iné riešenie už neexistuje. To však už neukázal nikto z vás, keďže to nebolo vôbec jednoduché.
Riešenie 2 cez rovnice je naozaj veľmi jednoduché a stručné. Pre tých, ktorí riešenie rovníc nepoznajú je určené prvé riešenie, v ktorom je použitá veľmi jednoduchá úvaha, ktorá vás privedie k jedinému výsledku. Rada do budúcna znie, že skúšanie nie je vždy tá najlepšia voľba.

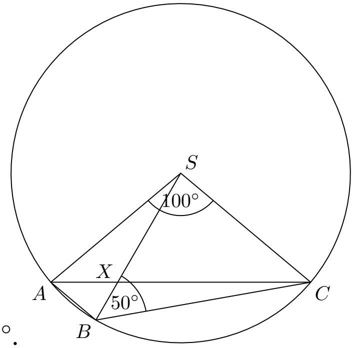
3 opravovali **Peťka Zibrínová** a **Matúš Hlaváčik**
najkrajšie riešenia: Slavomír Hanzely, Pavol Petruš

42 riešení

Zadanie

Máme kružnicu so stredom v bode S a polomerom 1 cm. Po jej obvode sú tri rôzne body A, B, C (bod B leží medzi bodmi A a C na ich kratšom oblúku) také, že platí: $|\sphericalangle ASC| = 100°$ a $|\sphericalangle SBC| = 50°$ a bod S leží mimo trojuholníka ABC. Aký uhol zvierajú uhlopriečky v štvoruholníku $ASCB$?

Vzorové riešenie



Najprv si bod, v ktorom sa pretínajú uhlopriečky, označíme X. Pokúsime sa teraz postupne vyjadrovať veľkosti jednotlivých uhlov. Môžeme si všimnúť, že trojuholník BSC je rovnoramenný ($|BS| = |CS| = r$ – polomery kružnice). Z toho vyplýva, že uhly pri základni sú rovnako veľké, teda $|\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle CBS| = 50°$. Keďže súčet uhlov v trojuholníku je 180°, tak

$$|\sphericalangle BSC| = 180° - |\sphericalangle SBC| - |\sphericalangle SCB| = \\ = 180° - 2 \cdot 50° = 80°.$$

Trojuholník ACS je taktiež rovnoramenný ($|AS| = |CS| = r$ – polomery kružnice), čiže

$$|\sphericalangle SAC| = |\sphericalangle SCA| = \frac{180° - 100°}{2} = 40°.$$

V trojuholníku XCS sme zistili už veľkosti dvoch uhlov, čiže vieme vypočítať veľkosť uhla SXC, ktorý zvierajú uhlopriečky:

$$|\sphericalangle SXC| = 180° - |\sphericalangle XCS| - |\sphericalangle XSC| = 180° - 40° - 80° = 60°$$

Uhol AXS je susedný s uhlom CXS, teda

$$|\sphericalangle AXS| = 180° - |\sphericalangle CXS| = 180° - 60° = 120°.$$

Uhlopriečky teda zvierajú uhol 60° (resp. 120°).

Komentár. Riešenie tejto úlohy sa dalo veľmi pekne zhrnúť do niekoľkých viet. Viacerí z vás ale nešetrili slovami, za čo sme síce nestrhávali body, ale nabudúce stačí naozaj stručne, k veci a zároveň tak, aby tam bolo všetko potrebné. Pre tých, ktorí sa k výsledku dostali cez pravítko a uhlomer, len toľko, že úlohy takéhoto typu sa rysovaním nemôžu riešiť. Predstavte si, že veľkosť toho uhla by bolo nejaké škaredé číslo, ktoré by ste uhlomerom odmerať nevedeli.

4

opravovali **Deniska Semanišinová** a **Maťo Vodička**
najkrajšie riešenie: Patrícia Lakatošová, Šimon Soták

40 riešení

Zadanie

Na tohtoročnej oštepovanej sa zúčastnili štyri družstvá, pričom každé zohralo s každým práve jeden zápas. V žiadnych dvoch zápasoch nepadlo rovnako veľa obručí a zároveň počet obručí hodených v každom zápase delí celkový počet obručí hodených na turnaji. Koľko najmenej obručí mohlo byť na turnaji hodených, ak v každom zápase bola hodená aspoň jedna obruč?

Vzorové riešenie

Keďže hrali 4 družstvá každý s každým, prvé družstvo hralo 3 zápasy, druhé družstvo hralo ďalšie 2 (jeden hralo s prvým družstvom), tretie hralo ešte 1 zápas. Odohralo sa teda $3 + 2 + 1 = 6$ zápasov.
V každom zápase padol iný počet obručí, no v každom aspoň jedna. Teoreticky najmenej by to teda mohlo byť, keby v prvom zápase padla 1 obruč, v druhom 2 atď., čo by spolu bolo $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ obručí. Zároveň počet obručí, ktorý padol v každom zápase má deliť celkový počet obručí. Teda celkový počet obručí musí mať aspoň 6 deliteľov (dokonca aspoň 7, lebo jeden deliteľ je to číslo samotné a v žiadnom zápase nepadlo obručí ako na celom turnaji). Číslo 21 má len 4 deliteľov (1, 3, 7, 21). Ďalšie číslo, 22, má tiež len 4 deliteľov (1, 2, 11, 22). Číslo 23 má len 2 deliteľov (1, 23) a číslo 24 má až 8 deliteľov (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24). Vieme, že menej ako 24 nepadlo, no ostáva overiť, či 24 vyhovuje.
Súčet 6 najmenších deliteľov 24 je $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 = 24$. Máme šťastie a sedí to. Teda spolu mohlo padnúť najmenej 24 obručí.

Komentár. Väčšina z vás túto úlohu vyriešila správne. Problémom občas bolo dokázať, že nájdený počet obručí, 24, je najmenší možný. Keď už sa rozhodnete skúšať, tak skúšajte naozaj všetky možnosti, aby sme vám nemuseli strhávať body za nevyskúšané možnosti. A pri skúšaní je väčšinou dobré nájsť nejakú „fintu“, aby ste nemuseli skúšať veľa možností. Tu si stačilo uvedomiť, že to musí byť aspoň 21 a už stačí vyskúšať len 3 menšie čísla od správneho riešenia.

5

opravovali **Janka Baranová** a **Jano Jursa**
najkrajšie riešenia: Dorka Jarošová, Slavo Hanzely

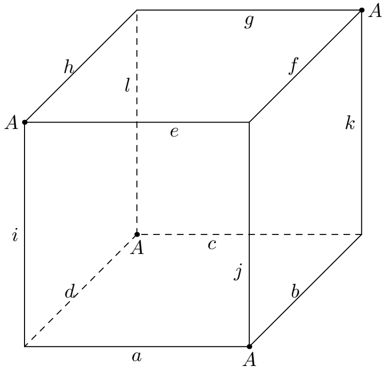
39 riešení

Zadanie

Každá hrana našej kocky má pripísané číslo tak, aby súčet čísel troch hrán, ktoré vychádzajú z jedného vrcholu, bol pre všetky vrcholy rovnaký. Označme si ho A.
a) Aký je vzťah medzi číslom A a celkovým súčtom čísel na všetkých hranách?
b) Je možné očíslovať hrany kocky číslami od 1 do 12 tak, aby súčet troch hrán vychádzajúcich z jedného vrcholu bol stále rovnaký pre všetky vrcholy?

Vzorové riešenie

a) Úloha sa dala riešiť mnohými spôsobmi. Ukážeme si dve riešenia.
Poďme sa pozrieť na to, aký je vzťah medzi číslom A (súčet čísel na troch hranách vstupujúcich do spoločného vrcholu) a súčtom čísel na hranách kocky, označme ho S. Označme si čísla na hranách písmenami, ako je to naznačené na obrázku. Súčet čísel na hranách kocky je



$$S = a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k + l.$$

Zo zadania máme, že každý vrchol má pripísané rovnaké číslo a preto

$$(a + d + i) = (a + b + j) = (b + c + k) = (c + d + l) = (i + e + h) =$$
$$= (e + f + j) = (f + k + g) = (l + g + h).$$

Z toho si vieme vyjadriť $8 \cdot A$, keďže vrcholov je 8 a pri každom je súčet hrán A. Tento súčet má hodnotu

$$(a + d + i) + (a + b + j) + (b + c + k) + (c + d + l) + (i + e + h)+$$
$$+(e + f + j) + (f + k + g) + (l + g + h).$$

Po preskupení písmeniek vidíme, že je to

$$2 \cdot (a + b + c + d + e + f + g + j + i + j + k + l).$$

Vieme, že

$$S = a + b + c + d + e + f + g + j + i + j + k + l$$

a teda platí $2S = 8A$. Po vykrátení dostávame $S = 4A$. Toto je náš hľadaný vzťah medzi číslom A a súčtom čísel na všetkých hranách.
Iný spôsob riešenia je napríklad nasledujúci. Vieme, že kocka má 12 hrán. Každá z týchto hrán končí v dvoch vrcholoch a preto do súčtu čísel na vrcholoch prispeje svojou hodnotou práve dvakrát. Preto súčet čísel na vrcholoch (je to presne $8A$) dostaneme tak, že číslo na každej hrane započítame práve dvakrát pre oba vrcholy v ktorých končí. Preto dostávame rovno $2S = 8A$, čo je ten istý výsledok ako v prvom prípade.
b) Vieme, že keď na hrany napíšeme čísla 1 až 12, čo je podstatné je, že sú to celé čísla, tak číslo A bude celé. Skúste si rozmyslieť prečo. Z časi a) vieme, že súčet čísel na hranách kocky sa rovná $4A$. Preto tento súčet musí byť deliteľný číslom

4. Skúsme sa teraz pozrieť na to aký súčet majú čísla 1 až 12. Je to 78 a ako ste si určite všimli toto číslo nie je deliteľné štvorkou a preto sa hrany kocky nehajú očíslovať číslami 1 až 12 tak, aby boli splnené podmienky zo zadania.

Komentár. Úlohu sa podarilo vyriešiť väčšine z vás, no niektorí nemali dobré zdôvodnenie svojho riešenia. Nabudúce myslite na to, že nestačí skúsiť pár čísel a podľa toho usúdiť, aký bude všeobecný vzťah. Na to pár riešiteľov doplatilo a prišlo o nejaké body.

6

opravovali **Tina Jesenská** a **Matúš Stehlík** • 36 riešení

najkrajšie riešenia: Henrieta Micheľová, Pavol Petruš, Šimon Soták

Zadanie

2010 rytierov je zapojených v šermiarskom turnaji, v ktorom každý hráč odohrá zápas proti každému (teda odohrá 2009 zápasov). Je pravda, že v každom momente počas turnaja vieme nájsť dvoch rytierov, ktorí zatiaľ odohrali rovnako veľa zápasov? Svoje riešenie poriadne zdôvodnite.

Vzorové riešenie

Všimnime si, že o presnom priebehu turnaja (napr. koľko zápasov môže prebiehať naraz, alebo aké je trvanie jednotlivých zápasov) nemáme žiadne informácie, a teda pravdepodobne to pre riešenie úlohy nebude dôležité. Našou úlohou je rozhodnúť, či je pravda, že v každom momente počas turnaja vieme nájsť dvoch rytierov, ktorí odohrali rovnako veľa zápasov.

Zamyslime sa nad tým, či môže nastať opačná situácia, a teda, že by sme v nejakom okamihu turnaja nenašli žiadnych dvoch rytierov s rovnakým počtom odohraných zápasov. Inak povedané, každý súťažiaci by mal za sebou iný počet súbojov. Predpokladajme, že takáto situácia by mohla nastať. Ako by vyzerala?

Keby sme v určitom okamihu prerušili turnaj a zisťovali od rytierov, koľko zápasov už majú za sebou, každý z nich by nám musel nadiktovať iné číslo (iný počet zápasov). Pre jasnejšiu predstavu, nech napríklad prvý rytier má odohraný 1 zápas, druhý rytier 2 zápasy, tretí rytier 3 zápasy... až prídeme k rytierovi číslo 2008, ten má odohraných 2008 zápasov, rytier číslo 2009 má 2009 odohraných zápasov. (Prideľovať rôzne počty zápasov môžeme jednotlivým rytierom samozrejme aj v inom poradí.)

Zostáva nám posledný, rytier číslo 2010. Tento nemôže mať odohraných 2010 zápasov, lebo maximálny počet je 2009. Jediný počet, ktorý sme ešte nikomu nepridelili je 0 odohraných zápasov. Predstavme si, že by rytier číslo 2010 neodohral žiaden zápas (pridelili by sme mu 0). Od tohto kroku, môžeme postupovať viacerými úvahami.

Úvaha 1: Musíme si uvedomiť, že ak predposledný rytier odohral 2009 zápasov, znamená to, že už odohral zápas s každým rytierom, teda aj s rytierom číslo 2010. Teda tento nemôže mať 0 odohraných zápasov, lebo určite už odohral aspoň 1

zápas. Takže počet odohraných zápasov rytiera číslo 2010 musí byť číslo medzi 1 a 2009, teda tento počet bude rovnaký, ako počet niektorého z ostatných rytierov. (Podobne, ak by nejaký rytier predsa len neodohral žiaden zápas, potom by nikto z ostatných rytierov nemohol odohrať všetkých 2009 zápasov a vtedy by sme tiež nejakým 2 rytierom museli prideliť rovnaký počet odohraných zápasov.)
Týmto sme ukázali, že situácia, v ktorej by každý rytier mal odohraný iný počet zápasov nemôže nastať. Z toho vyplýva, že v každom okamihu počas turnaja vieme určite nájsť dvoch rytierov, ktorí odohrali rovnako veľa zápasov.

Úvaha 2: Stačí porozmýšľať nad tým, aký počet zápasov mohol nejaký rytier odohrať. Teoreticky je možností 2010 (mohol odohrať od 0 po 2009 zápasov), ale to, že niekto má odohraných 0 zápasov vylučuje možnosť, že niekto má odohraných všetkých 2009 zápasov, takže tieto 2 možnosti obe naraz v skutočnosti nemôžu nastať. Teda musíme jednu z týchto možností vylúčiť a z celkového počtu 2010 nám ostane 2009 možností. Ak máme len 2009 možností rozdeliť medzi 2010 rytierov, nemôžeme každému prideliť inú možnosť. Nevieme možnosti rozdeliť tak, aby každý rytier odohral iný počet zápasov. A teda stále nájdeme dvoch rytierov, ktorí majú rovnaký počet odohraných zápasov.

Úvaha 3: Ak pridelíme každému rytierovi iný počet zápasov (od 0 po 2009) a všetky tieto počty zápasov sčítame, dostaneme číslo nepárne, pretože sa tam vyskytuje nepárny počet nepárnych čísel. Na druhej strane, toto číslo vyjadruje dvojnásobok počtu odohraných zápasov počas turnaja až do tohto momentu (pretože každý odohraný zápas je tam zarátaný dvakrát - v počte odohraných zápasov oboch hráčov, ktorí v ňom zápasili), teda to musí byť párne číslo, čo je spor. A zas sme ukázali, že situácia, v ktorej by každý hráč mal iný počet odohraných zápasov nemôže nastať. Je pravda, že v každom momente počas turnaja vieme nájsť dvoch rytierov, ktorí odohrali rovnako veľa zápasov.

Komentár. Ako ste správne niektorí odhalili, postup riešenia v sebe skrýva dôkaz sporom, ktorý je založený na myšlienke, že z dvoch tvrdení, z ktorých jedno je presným opakom druhého (výrok a negácia tohto výroku) je práve jedno tvrdenie pravdivé. Konkrétne v našej úlohe, ako pôvodný výrok zoberieme tvrdenie, že v každom momente vieme nájsť dvoch rytierov, ktorí majú rovnaký počet zápasov. Stačí ak si uvedomíme, že taký prípad, kedy by v nejakom momente turnaja mal každý rytier odohraný iný počet zápasov, (čo je negácia pôvodného výroku) nemôže nastať (teda negácia je nepravdivá), takže platí pôvodné tvrdenie.

Zadania 2. série úloh

Úlohy pošlite najneskôr **2. mája 2011**

Najmladší syn putoval už veľmi dlhý čas po prapodivnom kontinente, no po jeho bratoch nebolo ani stopy. Jednej upršanej a škaredej noci, nikto už nevie ako dlho bol kráľovič na ceste, šiel okolo krčmy, ktorá čupela pri ceste. Či už príjemné svetlo, ktoré značilo teplo a oddych, alebo myšlienka, že tu by o jeho bratoch mohli niečo vedieť, ho doviedli dovnútra. Po tom, čo zhodil dažďom zmáčaný plášť a usadil sa, začal sa obzerať dookola po zle osvetlenej miestnosti.

Úloha 1. *V krčme uvidel kráľovič sedieť pri stole štyroch priateľov, dvoch na jednej strane a dvoch oproti nim. Volali sa Peter, Jozef, Matej a Daniel. Ich zamestnania v abecednom poradí: bard, kupec, obuvník a zvonár. Oproti Petrovi na druhej strane stola sedí kupec. Daniel je svokor barda. Bard sedí vedľa Petra. Daniel je vyšší ako Jozef, ktorý je vyšší ako kupec. Zvonár má väčšiu plešinu ako Peter. Skúste určiť, ktorému z nich odpovedá ktoré povolanie.*

Princ ich chvíľu pozoroval a počúval o čom sa rozprávajú. Keď už približne vedel, čo kto robí a kto sa ako volá, prisadol si k nim a prihovoril sa. Po dlhšom rozhovore zistil, že títo štyria priatelia sa s jeho bratmi stretli. So smútkom v tvárach mu zdelili, že by na nich mal zabudnúť, lebo ich tajuplná cesta za pokladom viedla až do obávaného podsvetia. No najmladší z kráľových synov mal svojich bratov rád a navyše sa duchov nebál. Preto mu tí priatelia prezradili, že ak sa bude chieť dostať do podsvetia živý, bude musieť prejsť veľkou bránou Xip. Ale to sa vraj zatiaľ nepodarilo žiadnemu smrteľníkovi … Keď kráľovič dorazil k bráne Xip, prišiel na to, prečo sa to ešte nikomu nepodarilo. Na bráne bolo totiž treba nastaviť správny číselný kód, no na zistenie tohto kódu bola len malá indícia:

Úloha 2. *Číselný kód na bráne má deväť číslic: práve tri párne, práve tri nepárne, práve tri číslice sa v tomto čísle vyskytujú práve raz, tri práve dvakrát. Keď sa budeme baviť tým, že sčítame vždy dve číslice, ktoré sú vedľa seba, bude súčet až na jeden prípad väčší ako 4 a určite nikdy nepresiahne 10. Súčiny dvoch po sebe idúcich číslic sú po poradí 0, 0, 0, 0, 25, 5, 3, 9. Aký kód je treba zadať na bránu, keď viete, že nezačína osmičkou?*

Najmladší z bratov po dlhšom rozmýšľaní prišiel na ten správny kód. Brána sa s vrzgotom otvorila a on vstúpil do podsvetia. Niekoľko hodín putoval obyčajným šerom. Nebolo tam nič, ani rastliny, ani kamene, ani zvieratá a dokonca ani duchovia. No nakoniec dorazil k tunelu, pred ktorým stáli štyria duchovia. Ak si myslíte, že duchovia sú hrôzostrašní, tak sa veľmi mýlite. Ba práve naopak, títo duchovia sa báli tmy.

Úloha 3. *Štyria duchovia – Adam, Boris, Cyril a Dano – chcú prejsť cez tunel. Adamovi trvá cesta cez tunel minútu, Borisovi dve minúty, Cyrilovi štyri a Danovi päť minút. Nakoľko je tunel príliš úzky, môžu cezeň prejsť nanajvýš dvaja duchovia naraz. Majú k dispozícii lampu, ktorá vydrží svietiť 12 minút. Podarí sa* *duchom prejsť cez tunel tak, aby nikto z nich nemusel prechádzať potme? Ako? (Ak prechádzajú dvaja duchovia naraz, idú rýchlosťou pomalšieho z nich.)*

Kráľovič prešiel tunelom bez problémov aj po tme, veď on sa tmy nebál. Keď sa ocitol na druhej strane, to, čo uvidel, mu vyrazilo dych. Ocitol sa vo velikánskej jaskyni, kde sa to hýrilo duchmi. Bola tam kopa radov, kde duchovia pokojne stáli a čakali, kým dôjdu na rad. Nikto tam nebol netrpezlivý, veď oni sa už nemali kam ponáhľať. Keďže ho zaujímalo, čo čaká na konci týchto radov, postavil sa aj on do jednej šory.
Úloha 4. *V tejto jaskyni prebiehala anketa, v ktorej duchovia hlasovali o najkrajšie prirodzené číslo od* 1 *do* 10*. Po jej vyhodnotení si princ všimol, že pre každé číslo okrem* 1 *platí to, že počet bytostí, ktorým sa páči, je rovnaký ako súčet počtov bytostí, ktorým sa páčia čísla od neho menšie. Princovo číslo sa okrem neho páči ešte* 128 *bytostiam (duchom). Ktoré číslo je Princovo najobľúbenejšie?*

Po skončení ankety pokračoval vo svojej ceste ďalej. No narazil na ďalší problém a to, že sa dostal ku Temnej rieke, no most cez ňu bol zničený a nedalo sa po ňom prejsť. Samozrejme, že rieku prebrodiť nemohol, veď každý na tomto svete vedel, že Temná rieka je veľmi silná kyselina. Preto sa rozhodol, že si postaví nový most. Keďže chcel, aby jeho most presne sedel, urobil si aj nákres.
Úloha 5. *Je daný obdĺžnik $ABCD$ a vo vnútri neho bod X. Úsečky, ktoré bod X spájajú s vrcholmi A, B, C, D rozdeľujú obdĺžnik na štyri trojuholníky. Obsahy niektorých troch z týchto trojuholníkov sú* 31*,* 54 *a* 90 *cm*^{2}*. Aký je obsah obdĺžnika $ABCD$?*

Terajší panovník prapodivnej krajiny, vlastne NEpanovník, prešiel po moste cez Temnú rieku bez ohrozenia kyselinou. Putoval ďalej šedou krajinou podsvetia, až ho pristavila príšera neidentifikovateľných tvarov. Ponúkla mu takéto možnosti: Buď bude hádať jej hádanky, alebo ho zje. Ak bude hádať a neuhádne, tak ho zje. Ak uhádne, tak mu povie, kde sa nachádzajú jeho bratia a dá mu ešte malý darček za odmenu. Chudák nemal veľmi na výber, a preto sa rozhodol, že tú hádanku skúsi rozlúsknuť.
Úloha 6. *Rytier Peťo má v ich pluku* 12 *ešte spolubojovníkov. Každý z týchto dvanástich má v ich pluku iný počet priateľov. Koľko priateľov má Peťo?*

Najmladší syn nakoniec uhádol hádanku a len tak-tak sa vyhol smrti zjedením hladnou príšerou. Príšera ho nerada nechala ísť, ale keďže slovo príšery platí naveky, musela mu povedať, čo vie. Prezradila mu, že ich bratov chytila kráľovná podsvetia, pretože sa jej veľmi zapáčili. Taktiež mu prezradila, že kráľovnú porazí len týmto špeciálnym mečom, ktorý bol ukutý v sopke aj spolu s bránou Xip. Najmladší syn sa príšere poďakoval, keďže slušná výchova ho nepustila, a odhodlane sa pustil cestou, kde by sa malo nachádzať kráľovstvo podsvetia . . .

Poradie po 1.sérii

PS je súcet bodov za predchádzajúce série, **1–6** sú body za jednotlivé úlohy a **CS** je celkový súcet bodov.

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	PCS
1. – 13.	Kristína Mišlanová	Tercia A	GAlejKE	0	9	9	9	9	9	9	54
	Henrieta Micheľová	Tercia A	GAlejKE	0	9	9	9	9	9	9	54
	Zuzana Králiková	Tercia A	GAlejKE	0	8	9	9	9	9	9	54
	Diana Hlaváčová	Tercia A	GAlejKE	0	9	9	8	9	9	9	54
	Dávid Nguyen	Tercia A	GAlejKE	0	8	9	9	9	9	9	54
	Pavol Petruš	7. A	ZŽdaňa	0	5	9	9	9	9	9	54
	Ivan Vanát	Tercia A	GAlejKE	0	9	9	8	9	9	9	54
	Žaneta Semanišinová	Tercia A	GAlejKE	0	8	9	9	9	9	9	54
	Petra Plšková	8. A	ZStarKE	0	9	9	9	9	9	9	54
	Slavomír Hanzely	Tercia	GKomeSB	0	9	9	9	2	9	9	54
	Katarína Krajčiová	Kvarta	GAlejKE	0	9	9	9	9	9	9	54
	Dávid Bodnár	Tercia A	GAlejKE	0	7	9	9	9	9	9	54
	Soňa Feciskaninová	Tercia A	GAlejKE	0	9	6	9	9	9	9	54
14. – 16.	Jakub Hlaváčik	Tercia B	GAlejKE	0	9	7	9	-	9	9	52
	Patrícia Lakatošová	Kvarta	GsvEdKE	0	7	9	9	9	9	9	52
	Daniel Onduš	Tercia A	GTr12KE	0	8	6	9	9	9	8	52
17.	Martin Majerčák	Tercia A	GAlejKE	0	9	6	6	9	9	9	51
18. – 19.	Zoltán Hanesz	7.A	ZKuzmKE	0	8	8	9	6	9	5	49
	Peter Kovács	Kvarta	GAlejKE	0	7	8	9	8	8	9	49
20. – 21.	Juraj Mičko	7. B	ZKro4KE	0	4	5	8	8	9	9	48
	Samuel Krajči	5.C	ZKe28KE	0	4	7	9	8	6	9	48
22.	Šimon Soták	Tercia A	GAlejKE	0	-	6	8	9	6	9	47
23.	Alexander Ténai	Kvarta	GAlejKE	0	8	7	9	9	9	3	45
24.	Jakub Mach	7. B	ZKro4KE	0	4	4	0	9	9	9	44
25. – 27.	Michal Merjavý	Tercia A	GAlejKE	0	8	7	7	-	1	9	41
	Alžbeta Ivašková	7. B	ZKro4KE	0	4	6	0	9	9	4	41
	Jozef Janovec	Kvarta	GAlejKE	0	8	7	9	8	9	-	41
28. – 29.	René Michal Cehlár	8. A	ZKro4KE	0	9	7	-	2	8	9	37
	Michal Bodnár	Tercia A	GAlejKE	0	3	5	1	4	9	7	37
30. – 31.	Dorota Jarošová	Kvarta	GAlejKE	0	4	9	8	6	9	-	36
	Patrik Hohoš	Tercia A	GAlejKE	0	6	7	7	6	3	1	36
32.	Lucia Perešová	7. A	ZKro4KE	0	4	5	8	5	5	3	35
33.	Veronika Schmidtová	7. B	ZKro4KE	0	1	6	0	8	7	3	33
34.	Alexander Kling	7. A	ZIng.SN	0	3	6	-	9	-	-	27
35. – 36.	Martina Horváthová	7. B	ZKro4KE	0	4	6	2	5	2	1	25
	Matej Janošík	7. A	ZIng.SN	0	-	7	-	9	-	-	25
37.	Ivana Jakubčáková	8. A	ZKomePP	0	6	9	0	5	4	-	24
38. – 39.	Zuzana Niedelová	8. A	ZDrabKE	0	3	6	7	5	0	1	23
	Martin Seman	Príma B	GAlejKE	0	4	6	0	6	-	1	23

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	PCS
40.	Matúš Labuda	Tercia A	GAlejKE	0	3	5	3	-	5	-	21
41. – 42.	Adam Õrhalmi	8. A	ZKro4KE	0	3	3	1	2	3	3	16
	Samuel Oswald	7. B	ZKro4KE	0	1	2	0	1	6	-	16
43. – 44.	Eduard Lavuš	7. B	ZKro4KE	0	3	4	1	-	-	3	15
	Rastislav Dudič	9. A	ZPostKE	0	-	6	-	9	-	-	15
45.	Martin Beer	7. A	ZIng.SN	0	-	7	-	-	-	-	14
46.	Ivana Bernasovská	5. B	ZKro4KE	0	3	5	0	-	-	-	13
47.	Jozef Kunc	7. B	ZKro4KE	0	-	6	-	-	-	-	12
48.	Roderik Horovský	7. B	ZKro4KE	0	-	5	-	-	-	-	10
49. – 51.	Richard Husár	9.A	ZStanKE	0	-	9	-	-	-	-	9
	Anton Gromóczki	9. A	ZStanKE	0	-	9	-	-	-	-	9
	Marek Pravda	9. A	ZStanKE	0	-	9	-	-	-	-	9
52.	Andrej Zavačan	7. A	ZIng.SN	0	-	4	-	-	-	-	8
53. – 54.	Maroš Kamenický	7. A	ZIng.SN	0	1	-	-	-	-	-	2
	Dávid Fulka	7. A	ZIng.SN	0	1	0	0	-	-	-	2
55.	Matúš Greňa	7. A	ZIng.SN	0	-	-	-	-	-	-	0

Za podporu a spoluprácu ďakujeme:

AGENTÚRA NA PODPORU VÝSKUMU A VÝVOJA

Korešpondenčný matematický seminár **MATIK**
Číslo 5 • Letná časť 24. ročníka (2010/11) • Vychádza 24. marca 2011
Internet: `http://matik.strom.sk` • E-mail: `matik@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1
Internet: `http://www.strom.sk` • E-mail: `zdruzenie@strom.sk`