KOREŠPONDENČNÝ MATEMATICKÝ SEMINÁR

MATIK

ČÍSLO **3** — ROČNÍK **24** INTERNET http://matik.strom.sk

Čaute decká,

tak a je to tu - to, na čo už tak netrpezlivo čakáte. Konečné poradie a s ním ešte čosi zaujímavejšie. Konečne sa dozviete, kto sa dostal na sústredenie a kto sa bude musieť nabudúce viac posnažiť. No aj pre jedných, aj pre druhých sa pomaličky blížia Vianoce a s nimi aj zaslúžené prázdniny plné relaxu. A po nich sa všetci aj s najúspešnejšími družstvami z LOMIHLAVu stretneme na dlho očakávanom sústredení. Tak sa na Vás tešíme a želáme pekné Vianoce.

Vaši vedúci *MATIK*a

Ako bolo...

Lomihlav Rovnako ako po minulé roky, aj tento november sa konala obľúbená súťaž družstiev Lomihlav. Žiaci si zarátali, dozvedeli sa niečo nové, stretli sa so starými známymi, ale aj spoznali nových kamarátov s podobnými záujmami. V prestávke pred vyhodnotením si zahrali hry a okrem toho všetkého si aj zasúťažili o pobyt na sústredku. Dúfame, že súťažiacim sa to páčilo a prídu aj nabudúce. A s tými najlepšími – dvomi družstvami z Krosnianskej a jedným z Parku Angelinum z Košíc, sa dúfam vidíme na sústredení už onedlho.

Ako bude...

Vianočný Maxiklub Aj tento rok sa uskutoční príjemné posedenie terajších aj bývalých riešiteľov, vedúcich, priateľov a vôbec všetkých, ktorí majú kladný vzťah k Matiku, Stromu, alebo Malynáru. Náplňou bude sa len tak stretnúť, porozprávať sa, spoznať nových ľudí a možno bude aj kapustnica. Táto super udalosť sa uskutoční v stredu, 22. decembra, na Prírodovedeckej fakulte na Jesennej 5 v Košiciach, v miestnosti P15 v suteréne v čase od 13:00 do 18:00. Presnejšie informácie nájdete čoskoro aj na stránkach Malynára, Matika a Stromu. Tešíme sa na Vás.

Vzorové riešenia 2. série úloh

1 opravovali **Katka Réveszová** a **Dano Till** 57 riešení
najkrajšie riešenie: Diana Hlaváčová

Zadanie Do 100-galónovej priekopy s ostňami ústia dva prítoky. Prvým pretečie 5 galónov za 2 minúty, druhým 7 galónov za 3 minúty. Nádrž bude plniť tak, že otvorí prvý prítok a o niečo neskôr druhý prítok. Nádrž sa naplní za 26 minút po otvorení prvého prítoku. Po koľkých minútach otvoril druhý prítok?

Vzorové riešenie Zo zadania vieme, že priekopa má objem 100 galónov. Prvým prítokom sa bude priekopa plniť celý čas a to rýchlosťou 5 galónov za 2 minúty. Druhým prítokom sa bude priekopa plniť rýchlosťou 7 galónov za 3 minúty, ale nevieme ako dlho. Najprv si vypočítame, koľko galónov sa za tých 26 minút naplní len prvým prítokom. Je to $(26/2) \cdot 5 = 65$. Delíme tu vlastne celý čas plnenia sa priekopy 2 minútami aby sme zistili, koľko dvojminútových opakovaní plnenia prvým prítokom bude. Potom to násobíme množstvom vody, ktorá vtečie za tie 2 minúty do priekopy prvým prítokom. Zistili sme, že za celý čas, čo sa plní nádrž sa do nej naleje cez prvý prítok 65 galónov vody.

Zvyšok sa teda do musí naliať cez druhý prítok a preto sa cez druhý prítok naleje do priekopy $100 - 65 = 35$ galónov vody. Ďalej musíme zistiť, za aký čas sa tých 35 galónov vody naleje cez druhý prítok. To spravíme tak, že celý objem (35 galónov) predelíme siedmymi galónmi aby sme vedeli, koľkokrát sa tých sedem galónov naleje do priekopy a tento medzivýsledok vynásobíme tromi, pretože sedem galónov sa naleje druhým prítokom za 3 minúty a zistíme, ako dlho bude voda tiecť do priekopy druhým prítokom. Je to $(35/7) \cdot 3 = 15$.

Zistili sme, že druhým prítokom bude tiecť voda 15 minút. V zadaní je ale otázka, po akom čase od spustenia prvého prítoku sa sputí druhý prítok. To vypočítame tak, že od času plnenia sa priekopy prvým prítokom odpočítame čas plnenia sa priekopy druhým prítokom. Je to $26 - 15 = 11$ a teda sme prišli na to, že druhý prítok sa spustí 11 minút po spustení prvého prítoku.

Komentár. Táto úloha nebola ťažká a takmer všetci ju vypočítali správne. Najčastejšou chybou bolo to, že ste nevysvetlili, prečo ste robili výpočty a čo ste nimi zistili. Ďalšou častou chybou bolo, že ste uvádzali galeóny a gály namiesto galónov, ale za to sme body nestrhávali. Potom tam boli už iba ojedinelé chyby ako napríklad zlý rozklad na prvočísla a chybné násobenie.

2 opravovali **Dáša Krasnayová** a **Matúš Stehlík**

najkrajšie riešenia: Adam Örhalmi, Katka Krajčiová

50 riešení

Zadanie V piesku sú vyryté čísla 4 a 17, v jednom kroku zmažeme jedno z nich a miesto neho napíšeme súčet predchádzajúcich dvoch čísel. Môžeme takto dostať číslo 2010? Ak áno, ako? Ak nie, prečo?

Vzorové riešenie Táto úloha bola veľmi podobná úlohe z prvej série, no na rozdiel od nej riešením nebol dôkaz, že sa to nedá, ale nájdenie postupnosti krokov, ktorou číslo 2010 dostaneme. Vôbec nebolo ťažké na to prísť, pretože pripočítavať stále jedno z čísel je asi ten najjednoduchší prípad, aký mohol nastať. Jednoducho keď vydelíme číslo 2010 číslom 17, zistíme, že je to 118 zvyšok 4. Čo je presne to, čo potrebujeme, lebo keď k pôvodnému číslu 4 budeme pripočítavať 17, tak po 118 krokoch dostaneme číslo 2010. Teda číslo 2010 dostaneme z čísel 4 a 17 tak, že vždy škrtneme číslo, kde pôvodne bola štvorka. Teda po prvom kroku máme dvojicu 17 a 21, po druhom 17 a 38, po treťom 17 a 55 a tak ďalej. Týchto krokov urobíme 118. Vidíme, že sa číslo na mieste pôvodnej štvorky zväčšuje vždy o 17, pričom na začiatku tam bola 4. Preto po 118 krokoch tam bude $118 \cdot 17 + 1 \cdot 4 = 2010$, teda to sedí.

Komentár. Ako ste si mohli všimnúť, úloha mala veľmi podobné zadanie ako jedna z úloh prvej série. Cieľom týchto dvoch úloh bolo ukázať na rovnakom probléme ako dokázať, že úloha riešenie má a taktiež ako dokázať, že riešenie nemá. Takže ešte menší komentár k tomu ako ukázať, že riešenie má: Ideálne je nájsť to riešenie a vysvetliť postup akým ho uskutočniť, pretože z niečoho ako „2010 dáva zvyšok 4 po delení 17, takže sa to dá." nemusí byť hneď jasné, že je to tak. Ak by riešenie nebolo také triviálne (že stále pripočítame to isté číslo), z niečoho podobného sa riešenie dá vidieť len ťažko. Ak už nejakým spôsobom prídeme na to, že úloha riešenie má, je podstatné urobiť akúsi skúšku správnosti, a toto riešenie aj napísať (teda overiť či daná vlastnosť je postačujúcou podmienkou pre možné vyriešenie problému).

3

opravovali **Radka Masloviaková** a **Matúš Stehlík** 44 riešení

najkrajšie riešenia: Šimon Soták, Dávid Bodnár, Adam Skybjak

Zadanie Na kľúčoch boli čísla. Hľadal všetky 5-ciferné čísla deliteľné číslom 84, pre ktoré platí: Jeho prvé tri číslice tvoria číslo, ktoré je trojnásobkom čísla tvoreného zostávajúcimi dvoma ciframi. (Poradie sa nemení).

Vzorové riešenie Označme si hľadané 5-ciferné číslo a. Ďalej chceme, aby číslo a bolo deliteľné 84. Teda musí byť deliteľné číslami 3, 4, 7 (toto zistíme z prvočíselného rozkladu čísla 84).

• Číslo je deliteľné tromi práve vtedy, keď ciferný súčet čísla je deliteľný tromi. Lenže prvé trojčíslie je trojnásobkom posledného dvojčíslia, teda je určite deliteľné tromi (takže aj súčet prvých troch cifier je deliteľný tromi), teda aj súčet posledných dvoch cifier musí byť deliteľný tromi, takže aj posledné dvojčíslie je deliteľné 3.

• Číslo je deliteľné štyrmi práve vtedy keď jeho posledné dvojčíslie je deliteľné štyrmi. Takže posledné dvojčíslie musí byť deliteľné tromi aj štyrmi, teda aj ich najmenším spoločným násobkom, dvanástimi. Teraz už sme dosť obmedzili čísla, ktoré by to mohli byť tak zvyšné podmienky môžeme overiť skúšaním (deliteľnosť siedmimi a vlastnosť, že trojnásobok posledného dvojčíslia je trojčíslie). Vďaka podmienke o tom, že prvé trojčíslie je trojnásobok posledného dvojčíslia a z toho, že poznáme posledné dvojčíslie vieme zistiť celé číslo. Potom už len overíme, či je deliteľné siedmimi a či je 5-ciferné.

Po dosadení za posledné dvojčíslie čísla 12 a 24 dostávame len 4-ciferné číslo. A po dosadení 36, 48, 60, 72, 84, 96 (dalej už to nie sú dvojčíslia) dostávame čísla 10836, 14448, 18060, 21672, 25284, 28896, ktoré sú všetky deliteľné 7, teda sme našli výsledné čísla, ktorých je 6. Môžeme ešte urobiť skúšku a vidíme, že všetko sedí :).

Iné riešenie Najskôr sa dohodnime, že znakom $\overline{abc}$ značíme číslo, ktoré má cifry a, b a c.

Nech $\overline{abcde}$ označuje hľadané číslo. Kedže prvé trojčíslie je trojnásobkom posledného dvojčíslia tak $\overline{abc} = 3 \cdot \overline{de}$, ale tiež $\overline{abcde} = 100 \cdot \overline{abc} + \overline{de}$ pretože číslo $\overline{abc}$ je stotinou čísla $\overline{abc00}$, ktoré keď sčítame s číslom $\overline{de}$ dostávame naše hľadané číslo. Ak dosadíme prvý vzťah do druhého dostávame $\overline{abcde} = 100 \cdot \overline{abc} + \overline{de} = 100 \cdot 3 \cdot \overline{de} + \overline{de} = 301 \cdot \overline{de}$.

Toto číslo má byť deliteľné 84. To znamená, že musí byť deliteľné každým z čísel 3, 4, 7 (84 rozložíme na prvočísla, ale dve dvojky nám dajú 4). Číslo 301 je deliteľné siedmimi, ale nie je deliteľné dvomi (takže ani štyrmi) ani tromi. Teda číslo $\overline{de}$ musí byť určite deliteľné číslami 4 a 3, teda aj dvanástimi. Kedže je to dvojčíslie a jeho trojnásobok je trojčíslie, môžu to byť tieto násobky čísla 12: 36, 48, 60, 72, 84, 96 po dosadení týchto čísel do vzťahu $\overline{abcd} = 301 \cdot \overline{de}$ dostávame riešenia. Skúšku robiť nepotrebujeme, pretože zo spôsobu akým sme tieto čísla našli vyplýva, že danú podmienku spĺňajú a tiež, že žiadne iné nevyhovujú.

Komentár. Väčina riešení bola správna, aj keď nie každému sa podarilo úlohu vyriešiť takto elegantne a nemálo riešení spočívalo vo vyskúšaní dosť veľa možností, pretože niektorí si nevšimli všetky tieto vlastnosti, ale napr. iba deliteľnosť 2 (za čo sme samozrejme nestrhávali body, lebo je to správne). Preto by sme radi pochválili tých, ktorým sa podarilo dôjsť ku riešeniu vyskúšaním ozaj malého počtu riešení podobne ako vo vzorovom riešení. A tiež tých ostatných, že si dali tú námahu toľko skúšať :).

4

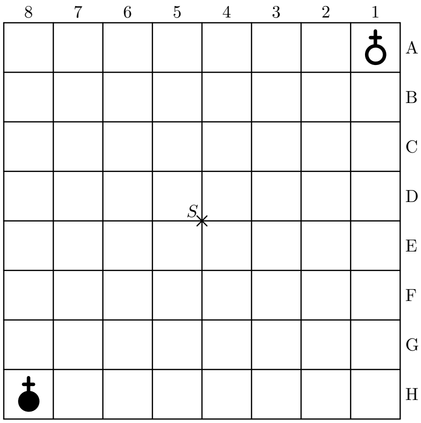
opravovali **Deniska Semanišinová** a **Tomáš Babej**

najkrajšie riešenie: Zoltán Hanesz

41 riešení

Zadanie Dvaja hráči hrajú na šachovnici 8×8 nasledujúcu hru: prvý postaví svojho kráľa na šachovnicu na políčko A1 a druhý druhého kráľa na H8 (králi sa pohybujú ako v normálnom šachu – posun o jedno políčko ľubovoľným smerom). Hráči striedavo ťahajú vždy svojim kráľom tak, aby kráľ nevstúpil na políčko, kde už nejaký z kráľov stál. Prehráva ten, kto nemôže urobiť ďalší ťah. Nájdite víťaznú stratégiu pre niektorého z hráčov (ako má hrať hráč, aby vyhral, nech by druhý hráč hral akokoľvek).

Vzorové riešenie Všimnime si, že šachovnica 8×8 je stredovo súmerná podľa bodu S. Inak povedané vidíme, že políčka A1 a H8, A2 a H7, atď. si navzájom odpovedajú.



Víťazná stratégia existuje pre druhého hráča. Spočíva v tom, že bude robiť tzv. zrkadlové ťahy, t.j. vždy potiahne na políčko stredovo súmerné (podľa bodu S) s tým, na ktoré v predchádzajúcom ťahu išiel jeho súper. Potom vieme povedať, že:

- Druhý hráč určite nevstúpi na políčko, na ktorom už predtým bol. Pokúsme sa to teraz zdôvodniť. Druhý hráč ťahá iba na zrkadlové políčka prvého hráča. Tým pádom, ak by vstúpil na políčko, na ktorom už bol, tak ešte predtým musel byť na zrkadlovom políčku už druhý krát jeho súper.
- Druhý hráč určite nevstúpi na políčko, na ktorom stál prvý hráč. Opäť platí to isté, políčka, na ktorých stál prvý hráč si odpovedajú s políčkami, na ktorých stál druhý hráč. Teda skôr, než druhý hráč vstúpi na políčko, na ktorom stál prvý hráč, musí prvý hráč vstúpiť na políčko, na ktorom stál druhý hráč.

Vidíme teda, že druhý hráč určite neprehrá. Zároveň však nemôže nastať ani remíza, pretože šachovnica má konečný počet políčok, takže po najviac 62 ťahoch niektorý z hráčov aj tak bude musieť vstúpiť na políčko, na ktorom už niekto pred ním stál.

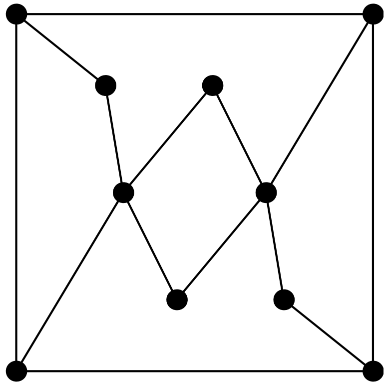
Komentár. Rôznych návodov ako vyhrať nám prišlo neúrekom. Od „Postavíme dvojitú barikádu.“ cez „Vyhodíme súperovho kráľa.“ po klasické „Nedá sa.“ :) Mnohí z vás uviedli správnu stratégiu, no nezdvôvodnili, prečo je naozaj vyhrávajúca. Nikto taktiež nespomenul, že hra musí skončiť po konečnom počte krokov, a teda, že nemôžeme hrať donekonečna. Tu sme to považovali za zrejmé, avšak pri iných úlohách tohto typu to vždy také jasné byť nemusí.

5 opravovali **Matúš Hlaváčik** a **Matúš Stehlík**

najkrajšie riešenia: Henrieta Micheľová, Patrícia Lakatošová

53 riešení

Zadanie Na obrázku je mapa, kde čiary sú chodby a krúžky znázorňujú komnaty. Je možné prejsť každou komnatou bez toho, aby sme niekde boli dvakrát?



V prvom rade by sme Vám radi vysvetlili zadanie úlohy, pretože sa našli aj takí, ktorí to nepochopili. Otázka znie: „Je možné prejsť každou komnatou bez toho, aby sme niekde boli dvakrát?“ a nie či môžeme prejsť všetkými chodbami práve raz (teda nakresliť obrázok jednou čiarou, ako si to niektorí vysvetlili). My teda chceme nájsť takú trasu, aby sme prešli všetkými komnatami, ale ani v jednej neboli viac ako raz. Táto úloha nemá riešenie, čiže sa to nedá prejsť tak, aby sme boli v každom bode práve raz. Budeme teraz uvažovať, že sa nám riešenie predsa len podarilo nájsť a pokúsime sa prísť na to, aké môže byť (ukážeme, že žiadne nemôže byť).

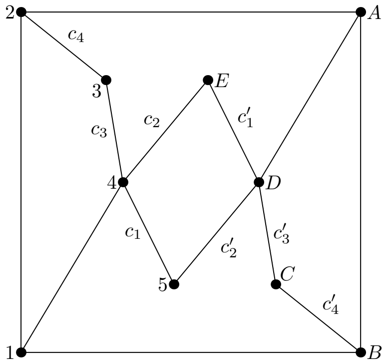
Môžeme si všimnúť, že tento graf je symetrický (teda niektoré dvojice bodov si odpovedajú), a to takto:

$$1 \longleftrightarrow A$$
$$2 \longleftrightarrow B$$
$$3 \longleftrightarrow C$$
$$4 \longleftrightarrow D$$
$$5 \longleftrightarrow E$$

Mnohí ste si všimli, že štvoruholník 45DE je kritický, teda nejakým spôsobom nám robí problémy. Ak by sme začali aj skončili v bode mimo tohto štvoruholníka, tak by sme museli cez neho prejsť tak, aby sme prešli cez všetky body 4, 5, E a D a zároveň cez každý práve raz. To sa nedá, pretože ak prídeme najprv napr. do bodu 4 (alebo D, ale to je symetrické), tak potom musíme pokračovať do bodu 5 (príp. E) a z neho vedie chodba len do bodu D. Sme teda v bode D a musíme sa dostať ešte do bodu E (príp. 5) – podľa toho, kde sme ešte neboli. Ale keď tam pôjdeme, tak sa už nedostaneme do tých bodov, ktoré sú mimo tohto štvoruholníka a ešte sme v nich neboli a zase opačne, keď pôjdeme von, nedostaneme sa už do bodu

E (príp. 5). Z tohto vyplýva, že v tomto štvoruholníku musí byť začiatok alebo koniec (alebo oboje) našej cesty.

Pri našej ceste použijeme z každého bodu dve chodby (jednu, ktorou prídeme do toho bodu a jednu, ktorou odídeme), okrem prvého a posledného bodu našej cesty, odkiaľ prejdeme len jednou chodbou. Do bodov 3, 5, E a C vedú len po dve chodby, takže obe budú použité (označíme ich c_1, c_2, c_3, c_4, c_1', c_2', c_3' a c_4' a to tak, aby c_1 odpovedalo c_1' atď.).



Teraz si môžeme všimnúť, že do bodov 4 a D vedú po tri označené chodby. Po všetkých ísť nemôžeme, teda jednu z ciest c_1 až c_3 a jednu z c_1' až c_3' musíme škrtnúť (budú to tie, po ktorých neprejdeme). Napríklad keď škrtneme c_1 a c_1', tak do bodov 5 a E bude viesť len jedna označená chodba, čiže tieto body budú začiatok a koniec našej trasy. Možností ako škrtnúť dvojice čiar je šesť. Rozoberieme všetky tieto možnosti, či sa dá alebo nedá pri niektorej z nich nájsť vyhovujúca trasa:

- škrtneme c_1 a c_1':

  Koncom a začiatkom tejto trasy sú teda body 5 a E (je jedno, ktorý to bude, keďže keď vieme ísť jedným smerom, tak sa musíme vedieť vrátiť tou istou trasou aj druhým smerom), teda napr. začiatok si dáme v bode E. Z bodu E pokračujeme chodbami c_2, c_3 a c_4 cez body 4 a 3 do bodu 2. Z bodu 2 sa môžeme vybrať do bodu A alebo 1. Keby sme išli do bodu A, tak potom môžeme už ísť iba do bodu B (bod D je už navštívený trasou od konca) a z neho musíme pokračovať v ceste po c_4', c_3' a c_2' do bodu 5. No pri tejto ceste sme vynechali bod 1, teda táto cesta nie je správna. To isté (len symetricky) platí aj keby sme išli z bodu 2 do bodu 1. Vtedy by sme vynechali bod A, čiže táto možnosť nie je správna.

- škrtneme c_1 a c_2' (symetricky c_2 a c_1'):

  Ak by sme škrtli tieto dve chodby, tak do bodu 5 sa vôbec nedostaneme. Táto možnosť teda tiež nie je správna.

- škrtneme c_1 a c_3' (symetricky c_3 a c_1'):

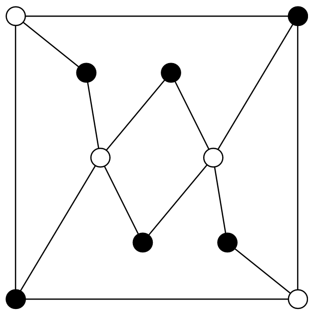
  Koncom a začiatkom tejto trasy sú teda body 5 a C. Tu by sme postupovali úplne rovnako ako pri 1. možnosti a došli by sme k tomu, že buď vynecháme bod 1 alebo A (podľa toho, cez ktorý bod pôjdeme z bodu 2 do bodu B).

- škrtneme c_2 a c_2':
  Koncom a začiatkom tejto trasy sú body 5 a E, teda také isté ako pri prvej možnosti. Tu budeme postupovať tak isto ako pri možnostiach 1. a 3., teda keďže sa potrebujeme dostať z bodu 2 do bodu B, tak cestou zase vynecháme buď bod A alebo bod 1.
- škrtneme c_2 a c_3' (symetricky c_3 a c_2'):
  Koncom a začiatkom tejto trasy sú teda body E a C. Prídeme opäť k takému istému rozporuplnému tvrdeniu ako pri 1., 3. a 4. možnosti.
- škrtneme c_3 a c_3':
  Ak by sme škrtli tieto dve chodby, tak do štvoruholníka $45ED$ sa vôbec nedostaneme, teda táto možnosť tiež nemôže byť správna.

Vylúčili sme teda všetky možnosti, a tak riešenie naozaj neexistuje.

Ešte by sme Vám radi ukázali jedno krásne trikové riešenie:

Ak všetky body zafarbíme na bielo a čierno tak, aby z každého čierneho bodu sa dalo dostať iba do bielych bodov a opačne, tak nám vznikne niečo také ako na obrázku:



Ak chceme prejsť každým bodom práve raz, tak prejdeme desiatimi bodmi. Keďže z každého bieleho sa vieme dostať iba do čierneho a naopak, tak keď vypíšeme, v akom poradí sme cez tie body išli, tak sa nám budú farby bodov striedať (napr. keď začnem bielym, tak to bude $B - Č - B - Č - \dots$). Rozdiel počtu bielych a čiernych bodov bude teda 0 (začneme a skončíme bodom inej farby, bude to $B - Č - B - Č - B - Č - B - Č - B - Č$ alebo $Č - B - Č - B - Č - B - Č - B - Č - B$). My si teraz všimnime, že máme 6 čiernych bodov a 4 biele body. Tento rozdiel je teda $6 - 4 = 2$. Takýto rozdiel však nastať nemôže, ak chceme pospájať všetky body a každým môžeme prejsť iba raz. Tým sme ukázali, že úloha naozaj nemá riešenie.

Komentár. Niektorí z vás zle pochopili zadanie, no dúfame, že teraz tomu už rozumiete. Veľa z Vás malo dobrú myšlienku, ale nedotiahli ste ju úplne do konca, respektíve neodôvodnili všetko dostatočne korektne. Všetkým, ktorí túto úlohu riešili skúšaním, môžeme povedať, že aj tak sa dá dôjsť ku správnemu riešeniu. Treba však napísať, akým spôsobom si skúšal, aby sme zistili, či si vyskúšal všetky možnosti, alebo treba vypísať všetky možnosti. Ak totiž pri skúšaní neoveríš všetky možnosti, tak to nie je správne riešenie, keďže sa môže stať, že úloha bude mať za riešenie akurát tú jednu možnosť, na ktorú si ty zabudol.

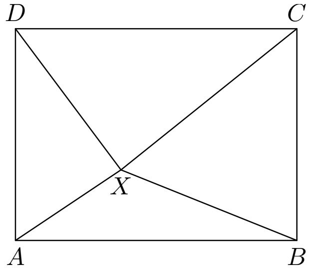
6 opravovali **Maťo Vodička** a **Peťo Milošovič**

najkrajšie riešenia: Katarína Krajčiová, Šimon Soták

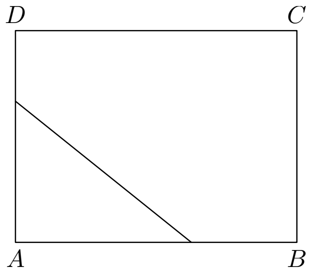
54 riešení

Zadanie Obdĺžnik s obsahom 12 cm^2 je ľubovoľne rozdelený na 3 trojuholníkové časti, pričom obsah jedného z trojuholníkov sa rovná polovici súčtu obsahov zvyšných dvoch. Určte obsah každého trojuholníka.

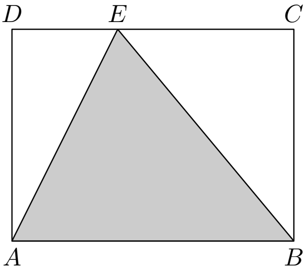
Vzorové riešenie Keď si prečítame zadanie, napadne nám využiť tú podmienku, že obsah jedného z trojuholníkov je rovný polovici súčtu obsahov zvyšných dvoch. Nech je obsah toho trojuholníka x. Súčet zvyšných dvoch je teda $2x$. Toto spolu musí byť obsah obdĺžnika – 12 cm^2. Teda $x + 2x = 3x = 12$, z čoho plynie, že $x = 4$ cm^2. Obsah jedného trojuholníka je 4 cm^2. A čo zvyšné dva? Keďže je to geometrický príklad, bolo by dobré nakresliť obrázok. Po nejakých dvoch až troch pokusoch rozdelenia obdĺžnika si všimneme, že stále má jeden trojuholník obsah 6 cm^2. Aj keď sa nám zdá, že to určite platí, tak to nestačí a musíme to ešte aj dokázať. Ideme teda trochu kresliť. Ak by zo všetkých štyroch vrcholov obdĺžnika vychádzala nejaká úsečka, tak to budú určite aspoň 4 trojuholníky (nad každou stranou jeden), čo je veľa (obr. 1).

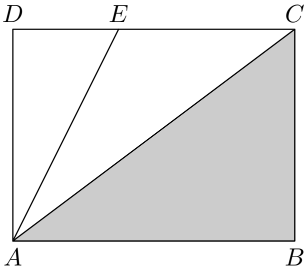


Existuje teda vrchol, z ktorého nevedie žiadna deliaca úsečka. Pri tomto vrchole sa teda musí nachádzať pravouhlý trojuholník. Ak prepona tohto trojuholníka neprechádza cez žiaden vrchol obdĺžnika, tak zvyšná časť obdĺžnika je päťuholník. Ten sa však jednou úsečkou na dva trojuholníky rozdeliť nedá (obr. 2).

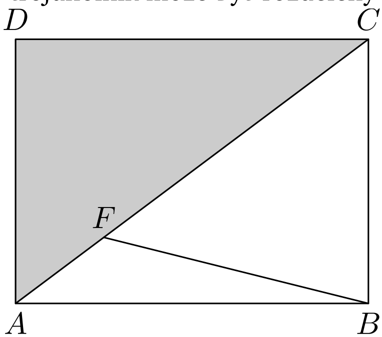


Ak prepona prechádza jedným vrcholom, tak zvyšná časť je štvoruholník, ktorý sa zrejme dá rozdeliť iba dvoma spôsobmi (jeden trojuholník má vždy obsah 6 cm^2). Na obr. 3 a obr. 4 máme obe tieto rozdelenia s vyznačeným trojuholníkom s obsahom 6 cm^2.





Jeho obsah vypočítame zo vzorca $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v$ a my vieme, že $a \cdot v = 12$, lebo je to obsah obdĺžnika. Teda $S = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ cm^2. A ak prepona prechádza dvoma vrcholmi, tak už tento pravouhlý trojuholník má obsah 6 cm^2 (vyznačený na obrázku) a ten druhý trojuholník môže byť rozdelený hocijako (obr. 5).



Rozobrali sme všetky možnosti a vždy má jeden trojuholník obsah 6 cm^2. Druhý má obsah 4 cm^2. Ostáva nám posledný výpočet: $12 - 6 - 4 = 2$. Posledný trojuholník má teda obsah 2 cm^2. Zistili sme teda, že pri ľubovoľnom rozdelení obdĺžnika na tri trojuholníky majú tieto trojuholníky obsahy 2 cm^2, 4 cm^2 a 6 cm^2.

Komentár. Mnohí z vás to pochopili tak, že obsah každého z trojuholníkov je rovný polovici súčtu obsahov zvyšných dvoch. No v zadaní je jasne napísané slovíčko "jedného" – treba pozorne čítať zadanie. Tiež iba málo z vás sa na to pozrelo z geometrického hľadiska (2. časť riešenia). Ostatní pracovali len s tromi číslami, ktorých súčet je 12. Pri geometrii je dobré si to nakresliť a pouvažovať nad obrázkom. Ak niečo dokazujete rozoberaním prípadov, nezabudnite vyskúšať naozaj všetky možnosti a aspoň jednou vetou spomenúť, že sú to naozaj všetky. A ešte jedna rada: snažte sa nepracovať len s celými číslami (strany obdĺžnika, obsahy), ak to nie je v zadaní napísané.

Poradie po 2.sérii

PS je súčet bodov za predchádzajúce série, **1–6** sú body za jednotlivé úlohy a **CS** je celkový súčet bodov.

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	PCS
1.	Henrieta Micheľová	3.OA	GAlejKE	54	5	9	9	9	9	9	108
2.	Katarína Krajčiová	4. OA	GAlejKE	53	9	9	9	9	9	9	107
3.	Žaneta Semanišinová	3.OA	GAlejKE	52	9	9	9	9	8	3	105
4.	Dávid Bodnár	3.OA	GAlejKE	54	7	-	9	8	8	9	104
5.	Zuzana Králiková	3.OA	GAlejKE	54	9	9	9	1	9	4	103
6.	Daniel Onduš	3.OA	GTr12KE	53	7	9	9	-	7	8	102
7. – 8.	Zoltán Hanesz	7. A	ZKuzmKE	54	7	1	9	9	8	4	100
	Jakub Genči	7. A	ZKro4KE	50	7	9	9	8	7	8	100
9.	Šimon Soták	3.OA	GAlejKE	51	4	9	9	8	-	9	99
10. – 11.	Soňa Feciskaninová	3.OA	GAlejKE	51	7	9	8	9	4	3	97
	Kristína Mišlanová	3.OA	GAlejKE	54	5	9	9	7	4	3	97
12. – 13.	Ivan Vanát	3.OA	GAlejKE	49	8	9	8	8	3	3	94
	Alexander Ténai	4.OA	GAlejKE	50	8	8	8	7	4	9	94
14.	Slavomír Hanzely	3.OA	GKomeSB	51	4	6	9	6	4	8	93
15.	Diana Hlaváčová	3.OA	GAlejKE	50	9	8	4	8	3	4	92
16.	Juraj Mičko	7. B	ZKro4KE	49	7	8	6	6	7	4	91
17.	Richard Solárik	3.OA	GAlejKE	53	6	-	6	8	1	8	90
18.	Martin Majerčák	3.OA	GAlejKE	48	7	9	5	8	2	3	89
19. – 20.	Patrik Hohoš	3.OA	GAlejKE	40	6	9	9	2	2	8	83
	Radka Bušovská	3.OA	GAlejKE	43	9	8	6	5	1	3	83
21. – 22.	Jakub Hlaváčik	3.OB	GAlejKE	36	8	9	9	8	-	-	79
	Dorota Jarošová	4.OA	GAlejKE	49	3	-	9	7	5	6	79
23.	Peter Kovács	4.OA	GAlejKE	44	7	-	8	9	5	4	77
24.	Juraj Jursa	1.OB	GAlejKE	39	4	8	7	5	4	3	75
25. – 26.	Petra Plšková	8. A	ZStarKE	23	8	9	9	-	8	8	73
	Alexander Kling	7. A	ZIng.SN	44	8	-	5	-	1	7	73
27.	Samuel Burik	8.A	ZKomeSV	35	9	9	9	2	2	5	71
28. – 29.	Jakub Mach	7. B	ZKro4KE	30	7	9	2	5	4	4	68
	Adam Õrhalmi	8. A	ZKro4KE	29	8	9	8	2	4	6	68
30.	Jozef Janovec	4.OA	GAlejKE	36	8	8	8	-	-	7	67
31.	Rastislav Dudič	9. A	ZPostKE	34	5	9	6	-	4	2	60
32. – 33.	Lukáš Gdovin	9.A	ZStanKE	20	8	-	9	8	4	7	56
	Adam Skybjak	7. B	ZKro4KE	26	8	-	7	6	-	1	56
34.	Ivana Jakubčáková	8. A	ZKomePP	25	6	-	8	8	2	4	55
35.	Florián Hatala	9.A	ZKro4KE	31	4	9	5	-	-	5	54
36.	René Michal Cehlár	8. A	ZKro4KE	34	5	9	-	-	-	5	53
37. – 38.	Edvard Lavuš	7. B	ZKro4KE	11	7	9	-	5	7	4	52
	Pavol Petruš	7. A	ZŽdaňa	52	-	-	-	-	-	-	52
39.	Marek Pravda	9. A	ZStanKE	14	9	2	9	7	2	4	47

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	PCS
40.	Tomáš Daneshjo	9.A	ZKro4KE	45	-	-	-	-	-	-	45
41. – 43.	Ivana Bernasovská	7. B	ZKro4KE	32	5	1	-	-	1	-	44
	Alžbeta Ivošková	7. B	ZKro4KE	33	5	-	-	-	-	1	44
	Kamila Sabová	3.OA	GTr12KE	44	-	-	-	-	-	-	44
44.	Patrícia Lakatošová	Kvarta	NULL	0	7	9	9	5	9	4	43
45. – 46.	Matúš Labuda	3.OA	GAlejKE	25	5	1	-	2	2	2	42
	Michal Janko	3.OA	GTr12KE	27	6	1	-	-	1	1	42
47.	Tereza Volavlková	8. A	ZKro4KE	20	6	-	7	-	2	6	41
48.	Tomáš Barbuščák	7. A	ZIng.SN	27	-	0	1	2	2	4	40
49. – 50.	Matej Janošík	7. A	ZIng.SN	21	7	1	1	1	-	-	38
	Martina Horváthová	7. B	ZKro4KE	22	5	1	-	-	1	4	38
51.	Anton Gromóczki	9. A	ZStanKE	27	7	-	-	-	-	3	37
52. – 54.	Alexandra Drozdová	8. A	ZKomeSV	27	-	9	-	-	-	-	36
	Samuel Oswald	7. B	ZKro4KE	17	-	9	-	-	1	-	36
	Adam Sáda	3.OA	GTr12KE	19	6	0	-	1	1	3	36
55.	Lukáš Pollák	7. A	ZIng.SN	12	8	1	1	-	3	2	35
56.	Maroš Kamenický	7. A	ZIng.SN	20	6	1	-	-	-	-	33
57.	Lujza Kočiková	7. A	ZIng.SN	27	0	-	-	-	1	2	32
58. – 59.	Diana Ďurišová	8. A	ZKomePP	13	-	8	8	-	1	-	30
	Martin Beer	7. A	ZIng.SN	23	-	-	-	3	1	-	30
60.	Veronika Schmidtová	7. B	ZKro4KE	21	-	1	-	-	1	3	29
61.	Andrej Zavačan	7. A	ZIng.SN	18	3	1	-	-	1	2	28
62.	Matúš Greňa	7. A	ZIng.SN	21	-	1	-	1	1	-	25
63.	Petra Demjanovičová	7. A	ZBajkPO	24	-	-	-	-	-	-	24
64. – 65.	Karin Štiffelová	7. A	ZIng.SN	20	1	-	-	0	1	-	23
	Samuel Sepeši	4.OA	GTr12KE	7	5	-	5	-	4	2	23
66.	Roderik Horovský	7. B	ZKro4KE	15	-	1	-	1	-	2	21
67. – 68.	Richard Husár	9. A	ZStanKE	14	6	-	-	-	-	-	20
	Kristína Barbušová	7. A	ZIng.SN	3	7	1	2	-	-	-	20
69. – 70.	Dominik Benko	9. A	ZKro4KE	17	-	-	-	-	-	-	17
	Veronika Seböová	7. A	ZIng.SN	3	6	1	-	-	1	-	17
71. – 73.	Michal Benej	9. A	ZKro4KE	14	-	-	-	-	-	-	14
	Jakub Kupčík	9.A	ZKro4KE	14	-	-	-	-	-	-	14
	Michal Greššák	9. A	ZKro4KE	14	-	-	-	-	-	-	14
74. – 75.	Dávid Fulka	7. A	ZIng.SN	2	-	2	-	-	4	1	13
	Radoslav Bobko	7. B	ZIng.SN	13	-	-	-	-	-	-	13
76.	Andrea Jakubovová	8. A	ZStarKE	12	-	-	-	-	-	-	12
77.	Jana Cerulová	9. A	ZKro4KE	9	-	-	-	-	-	-	9
78.	Denis Rozložník	9. A	ZKro4KE	8	-	-	-	-	-	-	8
79.	Petra Eškutová	9. A	ZKro4KE	7	-	-	-	-	-	-	7
80.	Richard Smolko	4. OA	GTr12KE	5	-	-	-	-	-	-	5
81.	Vanesa Múdra	7. A	ZIng.SN	0	-	-	-	0	1	0	2
82. – 84.	Jozef Kunc	7. B	ZKro4KE	0	-	-	-	-	-	-	0
	Michal Štěpánek	7. B	ZKro4KE	0	-	-	-	-	-	-	0

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	PCS
	Jakub Hromada	9. A	ZKro4KE	0	-	-	-	-	-	-	0

Za podporu a spoluprácu ďakujeme:

AGENTÚRA NA PODPORU VÝSKUMU A VÝVOJA

Korešpondenčný matematický seminár **MATIK**
Číslo 3 • Zimná časť 24. ročníka (2010/11) • Vychádza 9. decembra 2010
Internet: `http://matik.strom.sk` • E-mail: `matik@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1
Internet: `http://www.strom.sk` • E-mail: `zdruzenie@strom.sk`