Korešpondenčný Matematický Seminár

MATIK

Číslo **6** — Ročník **21** — Internet http://matik.strom.sk

Čaute prázdninoví nadšenci...

Už sa nám blíži leto plné zábavy. Určite nebudú chýbať opekačky a tábory. My vás chceme upozorniť na TMM (Tábor mladých matematikov), ktorý bude zároveň aj sústredením Matika. Najlepším riešiteľom ponúkame na tábor zľavu podľa toho ako sa snažili v letnej časti tohto ročníka. Dúfame, že si na TMM užijete kopec zábavy, spoznáte nových kamarátov a naučíte sa niečo nové z matematiky. Tak sa na vás všetkých tešíme :-). Uvidíte, bude to stáť za to.

VAŠI ORGANIZÁTORI

Vzorové riešenia 2. série úloh

1

opravoval **Janka Baranová** a **Katka Povolná**

najkrajšie riešenia: Tomáš Gerec

20 riešení

Majme 4-ciferné číslo $abcd$. Ciferný súčin má byť deliteľný práve 6 rôznymi ciframi. Teda žiadna z cifier nesmie byť rovná 0, lebo ciferný súčin by bol tiež 0. Ciferný súčin by bol deliteľný 10 ciframi (0 až 9).

Cifra d je prvočíslo, teda môžme uvažovať cifry 2, 3, 5 alebo 7. Cifra a je druhá mocnina d, teda $a = d \cdot d$. Cifra a môže byť len 4 alebo 9, pretože $5 \cdot 5 = 25$ a $7 \cdot 7 = 49$ nie sú ciframi. Takže do úvahy pripadajú čísla 4□□2 a 9□□3.

Teraz vylúčime čísla v tvare 4□□2. Vieme, že $2 + c = b$, teda súčet čísla 2 a iného párneho čísla (lebo číslo c je podľa zadania párne) má byť prvočíslo. Čo nie je možné, ak c sa nerovná 0 (to sme si už ukázali), lebo jediné párne prvočíslo je 2.

Teda vyhovujú len čísla v tvare 9□□3. Cifra c je párna, teda aspoň 2 a z toho vychádza, že cifra b je aspoň $3 + 2 = 5$ a keďže b je prvočíslo, tak to môže byť len 5 alebo 7. Pre obe možnosti vieme dorátať cifru c, keďže $b = c + d$. Dostávame dve čísla, ktoré zatiaľ vyhovujú všetkým podmienkam, a to 9523 a 9743. Už len stačí overiť, ktoré z nich je deliteľné práve 6 rôznymi ciframi. Ciferný súčin čísla 9743 je $9 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 = 756$, čo je deliteľné 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, teda 7 rôznymi ciframi. Na druhej strane, ciferný súčin čísla 9523 je $9 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 270$, a to je deliteľné presne 6 rôznymi ciframi, a to 1, 2, 3, 5, 6 a 9. Zadaniu vyhovuje jediné číslo, a to 9523.

Komentár. Úloha bola pomerne jednoduchá a o tom svedčí aj počet riešiteľov. Jediná chybička bola, že ste nulu v riešení vylúčili bez odôvodnenie alebo jediného slova. Skrátka ste na ňu pozabudli. Za čo žiaľ museli ísť bodíky dole. Ale potešilo nás ako ste sa s tou úlohou popasovali. Len tak ďalej :-).

2 opravoval **Kubo Jursa** a **Halucinka Simanová**

najkrajšie riešenia: Denisa Semanišinová

7 riešení

Číslo 200 je párne. Toto číslo má byť súčtom troch prvočísel. Súčet 200 dostaneme sčítaním troch párnych čísel, alebo párneho čísla a dvoch nepárnych čísel. Keďže párne prvočíslo je len jedno a to číslo 2, potom jedno z hľadaných prvočísel bude 2 a zvyšné dve budú nepárne prvočísla. Hľadáme preto dve nepárne prvočísla, ktorých súčet je $200 - 2 = 198$. Uvedomme si, že nám stačí vypísať prvočísla len po $\frac{198}{2} = 99$, pretože ak nájdeme riešenia s prvočíslom do 99, potom sú to všetky riešenia, lebo ak by jedno hľadané číslo bolo nad 99, tak druhé musí byť pod 99, čo sme však už skúsili (pozn. Ešte by obe prvočísla mohli byť 99, lenže háčik je v tom, že 99 nie je prvočíslo:-)).

Všetky možnosti vymenujeme v nasledovnej tabuľke: do prvého stĺpca dáme všetky možné prvočísla do 99, do druhého stĺpca dopočítame číslo tak, aby bol súčet 198, a v treťom stĺpci vyhodnotíme, či číslo v druhom stĺpci je prvočíslom:

3	195	NIE
5	193	ÁNO
7	191	ÁNO
11	187	NIE
13	185	NIE
17	181	ÁNO
19	179	ÁNO
23	175	NIE

29	169	NIE
31	167	ÁNO
37	161	NIE
41	157	ÁNO
43	155	NIE
47	151	ÁNO
53	145	NIE
59	139	ÁNO

61	137	ÁNO
67	131	ÁNO
71	127	ÁNO
73	125	NIE
79	119	NIE
83	115	NIE
89	109	ÁNO
97	101	ÁNO

Odpoveď: Riešením úlohy je týchto 13 trojíc prvočísel:

2	5	193
2	7	191
2	17	181
2	19	179

2	31	167
2	41	157
2	47	151
2	59	139

2	61	137
2	67	131
2	71	127
2	89	109
2	97	101

Komentár. Všetci ste mali správny výsledok, čo sa samozrejme cení. Len s niektorými postupmi to bolo trošku horšie. Problém bol ten, že ste síce napísali nejaký postup ako ste skúšali (ktorý nie vždy bol správny - za to šiel jeden - dva bodíky dole), ale neskúšali ste to v riešení. Vyskúšali ste si to inde na papieri a potom ste do riešenia napísali len výsledok. Za to šli tri bodíky dole. Ale celkovo tento príklad hodnotíme pozitívne. Ste skvelí:-).

3

opravoval **Martin "Poli" Polačko** a **Tomáš Kuzma**

najkrajšie riešenia: Jaroslav Petrucha

10 riešení

Tlačový škriatok opäť zaúradoval, a tak sa v zadaní objavilo „rozdiel medzi mojím a Bizzarovým počtom bodov je 60" namiesto pôvodného „rozdiel medzi mojím a Bizzarovým počtom bodov je 6". S touto chybičkou úloha nemala riešenie a tak sa väčšina z vás dovtípila, čo je vo veci. Tí, ktorí postupovali podľa zadania samozrejme nie sú nijak postihnutí (chyba je na našej strane, za čo sa vám ospravedlňujeme). Riešenie, ktoré uvádzame, je so správnym zadaním.

Najjednoduchšie bolo začať od niečoho, čo je isté, teda od nastrieľaných bodov. Vieme koľkokrát ktorý gangster čo trafil, teda si vieme napísať ich skóre:

$$L = 4 \cdot H \qquad P = 2 \cdot H + 2 \cdot T \qquad B = 1 \cdot H + 3 \cdot T$$

Vieme tiež, že za zásah do hlavy (H) je viac ako za zásah do hrude (T). Je teda jasné, že najviac bodov má Lloyd (L), potom Proof (P) a najmenej má Bizarre (B). Máme teda:

$$L > P > B$$

Čo môžeme využiť pri určovaní pravdivosti výrokov. Dostávame teda, že Lloydov prvý výrok je pravdivý a tiež Bizzarov prvý výrok je pravdivý. Vieme, že u každého sú pravdivé práve dva výroky. Rozoberme si výroky Bizzara:

$$(B_1) \quad B < P \qquad (B_2) \quad P = 20 \qquad (B_3) \quad L = P + 6$$

Vieme, že prvý výrok je pravdivý. Teda druhý alebo tretí musí byť tiež pravdivý, no nie oba naraz. Pozrime sa na výroky Proofa:

$$(P_1) \quad P = 18 \qquad (P_2) \quad L = P + 4 \qquad (P_3) \quad P = B + 2$$

Ako jasne vidíme druhý a tretí výrok Bizzara si odporuje s prvým a druhým výrokom Proofa. Rozdelíme si riešenie na dva prípady:

a) Platí druhý a neplatí tretí Bizzarov výrok.

V tom prípade neplatí prvý a platí druhý Proofov výrok. Dostávame teda:

$$P = 20 \qquad L = P + 4 = 24$$

Pozrieme sa na Lloydove výroky:

$$(L_1) \quad L > B \text{ alebo } L > P \qquad (L_2) \quad L = B \pm 6 \qquad (L_3) \quad B = 24$$

Platnosť L_1 a neplatnosť výroku L_3 vyplýva z $L > P > B$. Pokiaľ zohľadníme chybu v zadaní, dostávame riešenie $B = 18$, $P = 20$, $L = 24$.

b) Neplatí druhý a platí tretí Bizzarov výrok.

V tom prípade platí prvý a neplatí druhý Proofov výrok. Dostávame teda:

$$P = 18 \qquad L = P + 6 = 24$$

Pozrieme sa na Lloydove výroky:

$$(L_1) \quad L > B \text{ alebo } L > P \qquad (L_2) \quad L = B \pm 6 \qquad (L_3) \quad B = 24$$

Druhý Lloydov výrok teda musí platiť. Platnosť L_1 a neplatnosť výroku L_3 vyplýva z $L > P > B$. A keďže $L > B$ tak musí platiť $B = L - 6 = 24 - 6 = 18$. Čo je ale v rozpore s $B < P$.

Úloha má teda len jedno riešenie, a to $B = 18$, $P = 20$, $L = 24$. Za hlavu je teda $24 : 4 = 6$ bodov. Za hruď je $(20(2 \cdot 6)) : 2 = 8 : 2 = 4$ body.

Komentár. Uvedené riešenie je veľmi priame a mechanické, a teda sa ľahko zdôvodňuje. Dali sa však použiť aj rôzne pozorovania, napríklad, že L=24 v oboch prípadoch, čiže keď z dvoch výrokov jedného človeka platí len jeden, tak tretí musí platiť. Tie však potrebovali poriadne zdôvodnenie.
Medzi desiatimi riešeniami nebolo ani jedno zlé. Mnohí ste ale zabudli na vyskúšanie druhej možnosti (*b*)), za čo šli body dole. Väčšina z vás mala aj dosť stručné/neúplné zdôvodnenia.

4 opravovali **Martin "Poli" Polačko** a **Viktor Popovič**

najkrajšie riešenia: Martin Vodička, Lenka Mareková

11 riešení

Pripomeňme si, čo bolo úlohou. Máme 8 trestancov a tých treba rozdeliť do štyroch ciel tak, aby v každej cele boli dvaja väzni. Pričom nás zaujíma iba to, kto je s kým v cele, teda nezáleží na poradí ciel.
Najprv vytvorme prvú dvojicu. Prvého trestanca vyberáme z 8 trestancov (nazvime ho Adam). Na pozíciu druhého trestanca (nazvime ho Boris) máme 7 možností (Adama sme už vybrali). Teda na výber dvojice máme $8 \cdot 7 = 56$ možností. Keďže nezáleží na tom, či vyberieme Adama a potom Borisa, alebo Borisa a potom Adama, každá dvojica je v tomto zozname 56 možností uvedená dvakrát, takže skutočný počet možností je $\frac{56}{2} = 28$.
Poďme na druhú dvojicu. Ostali nám 6 trestanci. Postupujeme tak ako pri výbere trestancov v prvej dvojici. Takže na výber do druhej dvojice máme $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ (6 trestancov na prvé miesto, 5 na druhé a opäť nezáleží na poradí, preto delíme 2). Tretiu dvojicu vyberáme už len zo 4 trestancov a výsledný počet možností je $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$. No a ostali dvaja trestanci na dve miesta vo štvrtej dvojici, teda jediná možnosť naplniť štvrtú dvojicu. Spolu to je teda $28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 = 2520$ možností.
Toto ale ešte nie je definitívny počet možností. V zadaní je, že nás zaujíma iba kto je s kým v cele a nie to, kde sú. Takže možnosť *AB*, *CD*, *EF*, *GH* je zarátaná aj ako *CD*, *AB*, *EF*, *GH*, aj ako *GH*, *EF*, *CD*, *AB*, atď. Ostáva vyriešiť otázku, koľkými spôsobmi môžeme štyri dvojice trestancov umiestniť na izby? Pre prvú dvojicu mám 4 možnosti, pre druhú tri možnosti, pre tretiu dve možnosti a pre poslednú jednu možnosť. Teda celkovo $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ možností, ktoré sú rovnaké. Týmto počtom musíme predeliť pôvodný výsledok, aby sme splnili zadanie. Konečný počet možností ako rozdeliť 8 trestancov do dvojíc je $\frac{2520}{24} = 105$.
Iné riešenie: Ak by trestanci boli len dvaja, počet možností ako ich umiestniť do jednej cely je zrejme 1. Ak by trestanci boli štyria, počet možností ako ich umiestniť do dvoch ciel je rovný počtu možností ako ich rozdeliť na dve dvojice. Vezmime si jedného trestanca (napríklad toho, ktorý je prvý podľa abecedy). Ten môže vytvárať dvojicu s druhým, tretím, alebo štvrtým trestancom, čo sú tri možnosti. Zvyšní dvaja budú tvoriť druhú dvojicu.
Majme teraz šesť trestancov. Počet možností ako ich umiestniť do troch ciel je rovný počtu možností ako ich rozdeliť na tri dvojice. Nech Adam je jeden z trestancov (napríklad ten, ktorý je podľa abecedy prvý). Všetky možnosti ako vytvoriť tri

dvojice rozdeľme podľa toho, s kým tvorí dvojicu Adam. Na to máme 5 možností. Pre každú z týchto piatich možností ostali štyria trestanci, ktorých treba rozdeliť na dve dvojice, čo sa dá 3 spôsobmi (pozri predchádzajúci odstavec). Preto počet všetkých možností ako vytvoriť tri dvojice je $5 \cdot 3 = 15$.
Majme teraz osem trestancov. Počet možností ako ich umiestniť do štyroch ciel je rovný počtu možností ako ich rozdeliť na štyri dvojice. Nech Adam je jeden z trestancov (napríklad ten, ktorý je prvý podľa abecedy). Všetky možnosti ako vytvoriť štyri dvojice rozdeľme podľa toho, s kým tvorí dvojicu Adam. Na to máme 7 možností. Pre každú z týchto siedmich možností (napríklad AD) ostali šiesti trestanci (B, C, E, F, G, H), ktorých treba rozdeliť na tri dvojice, čo sa dá 15 spôsobmi (pozri predchádzajúci odstavec). Preto počet všetkých možností ako vytvoriť štyri dvojice je $7 \cdot 15 = 105$.

Komentár. Bohužial s úlohou ste si veľmi neporadili, väčšina z Vás určila počet možností ako umiestniť do cely jednu dvojicu trestancov. Napriek tomu nezúfajte, nabudúce to bude lepšie.

5 opravovali **Robko Hajduk** a **Monča Vaľková**

najkrajšie riešenia: Martin Vodička

13 riešení

1. riešenie Curtis rozdelil perníky tak, aby jeho spoluväzni dostali dvakrát viac gramov ako on. Teda v pomere 1 : 2. Z toho vyplýva, že súčet hmotností všetkých piatich sáčkov perníkov má byť deliteľný tromi. Preto stačí skúsiť, pre ktorú kombináciu piatich sáčkov je súčet ich hmotností deliteľný tromi, a či je možné rozdeliť sáčky, aby váha sáčkov bola práve 1 : 2.

Kinrep	Perníky	Súčet	Deliteľné 3
62 g	30 g, 32g, 36g, 38 g, 40g	176	NIE
40 g	30 g, 32g, 36g, 38 g, 62 g	198	ÁNO
38 g	30 g, 32g, 36g, 40g, 62 g	200	NIE
36 g	30 g, 32g, 38 g, 40g, 62 g	202	NIE
32 g	30 g, 36g, 38 g, 40g, 62 g	206	NIE
30 g	32g, 36g, 38 g, 40g, 62 g	208	NIE

Jediná pätica sáčkov ktoré nám vyhovujú je $30+32+36+38+62=198$ gramov. Väzni a Curtis si týchto 5 sáčkov rozdelia v pomere 1 : 2, takže Curtis dostane 66 gramov (30 a 36 gramové sáčky) a spoluväzni 132 gramov (32, 38 a 62 gramovov). Kínrep je teda v 40-gramovom sáčku.
2. riešenie (podľa Martina Vodičku) Tak ako v prvom riešení aj tu využijeme poznatok, že súčet hmotností všetkých balíčkov perníku je deliteľný tromi. Súčet hmotností všetkých sáčkov (aj s tým ktorý obsahuje Kínrep) dáva po delení tromi zvyšok 1. ($30 + 32 + 36 + 38 + 40 + 62 = 238$ a $238/3=79$ zvyšok 1.) Potrebujeme odobrať jeden sáčok a súčet má byť deliteľný tromi, takže musíme odobrať sáčok ktorého váha po delení tromi dáva zvyšok 1.

Skúsme si vypísať, aké zvyšky dávajú hmotnosti jednotlivých sáčkov po delení tromi: čísla 30, 36 sú deliteľné 3 (dávajú zvyšok 0), číslo 40 dáva zvyšok 1 a čísla 32, 38, 62 dávajú zvyšok 2. Len 40-gramový sáčok má zvyšok 1, takže ak ho odoberieme, bude súčet deliteľný tromi. Kínrep je teda v 40 gramovom balíčku a perníky sa rozdelia v pomere 1 : 2, takže Curtis dostane 66 gramov (30 a 36 gramové sáčky) a spoluväzni 132 gramov (32, 38 a 62 gramové).

6

opravovala **Katka Povolná**

najkrajšie riešenia: Martin Vodička, Denisa Semanišinová

12 riešení

Pozrime sa na šachovnicu 11×11. Nafarbíme si ju ako klasickú šachovnicu, teda na čierno-bielo. Bez ujmy na všeobecnosti si povedzme, nech je bielych políčok menej (teda presne 60). Všimnime si, že 60 trestancov stojí na bielych políčkach a na čiernych je ich až 61. Vieme, že z čierneho políčka môže trestanec preskočiť len na biele (lebo len s tými susedí, a to práve jednou stranou). Teda 61 trestancov má preskočiť len na 60 políčok. Z toho vyplýva, že aspoň dvaja trestanci stoja na rovnakom políčku. A to je to, čo sme chceli dokázať.

Komentár. Úloha bola skutočne nenáročná, ale náročné bolo dôjsť k správnemu dôkazu. Nestačí povedať, len to, že sa to nedá, alebo, že to platí pre všetky nepárne čísla. Stále je tam nezodpovedaná otázka prečo. Prečo je to tak a to ste tam bohužiaľ nemali, teda bodíky museli ísť dole. Ale skutočne vám to myslí:-) veľa zdaru do budúcna.

Poradie po 2.sérii

PS je súčet bodov za predchádzajúce série, **1–6** sú body za jednotlivé úlohy a **CS** je celkový súčet bodov.

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	PCS
1.	Martin Vodička	Tercia	GAlejKE	54	9	9	9	9	9	9	108
2.	Denisa Semanišinová	Tercia	GAlejKE	49	9	9	9	3	9	9	103
3.	Jaroslav Petrucha	Tercia	GMetoBA	46	9	9	9	3	9	-	94
4.	Lenka Mareková	7. A	ZKro4KE	40	8	6	8	9	9	6	89
5.	Filip Stripaj	7. A	ZKro4KE	41	8	-	9	-	9	9	85
6.	Patrik Turzák	7. A	ZKro4KE	46	-	6	4	3	5	9	82
7.	Jozef Lami	9. A	ZNov2KE	42	8	5	7	-	-	9	71
8.	Daniel Till	9. A	ZAngeKE	34	9	-	6	3	9	6	67
9. – 10.	Richard Pisko	8.A	ZKro4KE	35	8	-	-	3	8	9	63
	Ján Jursa	7. A	ZKro4KE	35	-	-	5	-	5	9	63
11.	Zuzana Takáčová	8. A	ZRehoKE	20	8	-	9	3	9	8	60
12.	Júlia Lengvarská	8. B	ZHutnSN	24	7	6	-	3	9	6	58
13.	Daniel Ondra	7. A	ZKro4KE	28	5	-	-	3	1	5	47

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	PCS
14.	František Lami	8. C	ZNov2KE	33	-	-	-	-	9	-	42
15.	Daniel Hennel	8.B	ZHutnSN	39	-	-	-	-	-	-	39
16.	Ivana Gašková	Kvarta	GAlejKE	23	9	-	-	6	-	-	38
17.	Matúš Hlaváčik	Tercia	GAlejKE	31	-	-	-	-	-	-	31
18.	Alexandra Dupláková	7. A	ZKro4KE	29	-	-	-	-	-	-	29
19.	Anna Podracká	Tercia	GAlejKE	16	-	-	-	-	-	-	16
20.	Viktória Baranová	7. A	ZKuzmic	10	-	-	-	-	-	-	10
21.	Jakub Šalagovič	Kvarta	GAlejKE	0	9	-	-	-	-	-	9
22. – 23.	Tomáš Gerec	Kvarta	GAlejKE	0	8	-	-	-	-	-	8
	Jakub Kinlovič	Kvarta	GAlejKE	0	8	-	-	-	-	-	8
24. – 27.	Matúš Bušovský	Kvarta	GAlejKE	0	7	-	-	-	-	-	7
	Rastislav Rusnák	Kvarta	GAlejKE	0	7	-	-	-	-	-	7
	Miroslav Stankovič	7. A	ZKro4KE	7	-	-	-	-	-	-	7
	Maroš Lukáč	8. B	ZKuzmic	0	7	-	-	-	-	-	7
28.	Matúš Molčan	Kvarta	GAlejKE	0	6	-	-	-	-	-	6
29.	Matúš Gerec	Kvarta	GAlejKE	0	4	-	-	-	-	-	4

Za podporu a spoluprácu ďakujeme:

Korešpondenčný matematický seminár **MATIK**
Číslo 6 • Letná časť 21. ročníka (2007/08) • Vychádza 5. júna 2008
Internet: `http://matik.strom.sk` • E-mail: `matik@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1
Internet: `http://www.strom.sk` • E-mail: `zdruzenie@strom.sk`