KOREŠPONDENČNÝ MATEMATICKÝ SEMINÁR

MATIK

ČÍSLO **2** — ROČNÍK **21** INTERNET http://matik.strom.sk

Aohj dšua mne uípsaná!

Keď už si sa tkoľo nčaakal, rzoholdi sme sa torkšu Ti to olpaitť. Ide o itsý durh treaipe, kdey je liečneá osboa npeiramo pervsdeečná o sovijch ndike nkeoničaicch ndarpirdzoeýnch sochnopstaich, aoku je nparkílad bzeporblmoévé čtíaine šailnehéo úvdou od šilaeýnch ogranziátoorv. Ždiane srtachy, vetško mmáe pod knorotlou a so smtrenlým pookjom na dšui Ti mžôeme onzáimť, že pri vnokjašom požuití neobli zitsneé židane nžeidaúce úinčky, a tak sme prsevdeenčí, že Ti tvarlé nálsekdy nherzoia. Odoprúačme tak dve hdoniky tdýženne stárivť rišeneím MATIKa a ver, že vsýldeky sa dotsaiva tkamer okmažtie. Nitko nkidy ntevdril, že to s nmai buedš mať ľhaké, ale zumlva je už kvrou sepčaetná, z čhoo neit návartu... Vinaoce- Nevinaoce, my si Ťa nádjeme a pootm... no a ptoom to pírde, súsrtekdo- všýka 180 cm, žtlé oči, vie harť poekr, je sploončíkom do bezsenných ncoí a nidky nsepí (pozorjue sojve vičeka znvúrta). Necchi vdeieť čhoo veštékho je schponé. Vimee kde býavš, tak vľea šťsatia v rtáaní...

Tvoj čakajúci Hlas zo záhrobia & company

Bodovanie

Ak ste si už pozerali poradie, iste ste si všimli, že namiesto 5 bodov ste dostali za správne riešenie rovno bodov 9. Nie, nikam sa nevlúpal žiaden škriatok, len sme sa rozhodli vaše riešenia hodnotiť bodmi od 0 po 9. Ostatné pravidlá ostali také isté, ako boli uverejnené v minulom čísle.

Vzorové riešenia 1. série úloh

1

opravovala **Janka Plavčáková**

najkrajšie riešenia: Denisa Semanišinová, Martin Vodička

28 riešení

Komentár.

Pre zjednodušenie označme veky jednotlivých Hotentotových synov a, b, c. Zo zadania vieme, že $a + b + c = 43$ a že každé z čísel a, b, c musí mat aspoň dva rôzne delitele väčšie ako 1 (a menšie ako 43). Teda žiadne z týchto čísel nesmie byť prvočíslo, lebo to je deliteľné iba jednotkou a sebou samým, a žiadne z týchto čísel nemôže byť ani 1.

Takže spomedzi všetkých čísel, ktoré pripadajú do úvahy, môžeme vynechať čísla 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43.

Stále nám ostáva dosť veľa čísel na to, aby sme prípadne rozobrali všetky trojice spĺňajúce podmienku $a + b + c = 43$. Skúsme sa zbaviť ešte nejakých čísel. Vylúčili sme prvočísla, skúsme sa pozrieť na ich mocniny.V našom prípade ide o čísla $4 = 2.2$, $8 = 2.2.2$, $9 = 3.3$, $16 = 2.2.2.2$, $27 = 3.3.3$ a $32 = 2.2.2.2.2$. Ak by jedno z týchto čísel, povedzme a, bolo vekom Hotentotovho syna, znamenalo by to, že jeden z deliteľov a delí b a iný zase c. Avšak aké delitele má takéto číslo? Iba prvočíslo a jeho mocniny (napríklad 16 má delitele 2, $4 = 2.2$, $8 = 2.2.2$ a $16 = 2.2.2.2$). Všetky tieto čísla sú súdeliteľné. No a v tom prípade dostaneme, že čísla b a c majú spoločného deliteľa väčšieho ako 1. To ale nevyhovuje zadaniu. Teda aj mocniny prvočísel môžeme vylúčiť.

Ostanú nám čísla 6, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 42. Aj to je veľa, však? Tak skúmajme ďalej.

Ak by sme zobrali dve najmenšie čísla, ktoré máme, 6 a 10, tak tretie bude nutne $43 - (6 + 10) = 27$. Teda všetky čísla väčšie ako 27 už môžeme vyškrtnúť, pretože sú príliš veľké. Takže nám ostane 11 čísel: 6, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 21, 22, 24, 26.

Skôr, ako si pozrieme jednotlivé možnosti, uvedomme si ešte jednu vec. Vek detí si vieme usporiadať tak, že $a \leq b \leq c$. Ak by boli niektoré dve čísla rovnaké, napr.: $a = b$, tak spoločný deliteľ a a b je $a = b$. Keďže tento deliteľ nemá deliť vek tretieho syna (c), tak c a b by nemali spoločného deliteľa rôzneho od 1. Podobne, kedže $a = b$, ani c a a by nemali spoločného deliteľa rôzneho od 1.

Teraz si už môžeme vypísať 43 ako súčty trojíc čísel, ktoré nám ostali. Dostávame tri možnosti, pri ktorých už ľahko overíme, či spĺňajú i ostatné podmienky zadania.

$$43 = 6 + 15 + 22$$
$$43 = 10 + 12 + 21$$
$$43 = 10 + 18 + 15$$

Overenie si uvedieme v tabuľke

a	b	c	$NSD(a, b)$	$NSD(a, c)$	$NSD(b, c)$
6	15	22	3	2	1
10	12	21	2	1	3
10	15	18	5	2	3

Všetky podmienky zadania úlohy spĺňa jediná trojica čísel, a to 10, 15, 18.

Takže Hotentotovi synovia majú 10, 15 a 18 rokov.

Komentár. Túto úlohu ste mohli riešiť otestovaním všetkých možností. No to neznamená, že testovať si to máte doma na papier a potom do riešenia, ktoré spisujete iba napíšete, že ste overili všetky možnosti. Bohužiaľ mi nevieme potom či ste naozaj na niečo nezabudli a preto išli body dole. Nabudúce v takom prípade rozpíšte všetky možnosti, alebo nájdite nejaký systém, ktorý úloha iste má keď sa už ocitla v seminári *MATIK*.

2 opravovala **Katka Povolná**

najkrajšie riešenia: Berenika Tužilová, František Lami, Jozef Lami

20 riešení

Na začiatok si ujasníme, ako mala byť úloha chápaná. Poniektorí z vás sa domnievali, že v loďke stále niekto musí byť (asi aby neodplávala :)). Úlohy takéhoto typu sa však chápu skôr v tom zmysle, že keď niekto prepláva na druhý breh, tak vystúpi a s loďkou sa vráti späť niekto, kto bol na druhom brehu, prípadne niekto, kto bol v loďke. Na túto myšlienku ste niektorí zabudli, alebo si ju neuvedomili.

A teraz sa pozrieme na samotné riešenie. Na začiatok sa nám naskytnú tri možnosti, kto sa môže na prvú plavbu vydať: *SS*, *TT*, *ST* (*S*-syn, *T*-týpek). Teoreticky máme aj možnosť samotné *S* alebo *T*. Ale to v tomto prípade veľký význam nemá, lebo by sa musel aj tak vrátiť. Nemá to pre nás význam ani ďalej, čo si môžete uvedomiť aj sami bez nášho komentára. S určitosťou môžeme tvrdiť, že *SS* nepôjdu, lebo na prvom brehu by zostal *S* a traja *T*. Teda týpci by toho syna okradli. Takže nám ostávajú možnosti *TT* a *ST*. *TT* vyhovuje, lebo na prvom brehu bude len jeden týpek a traja synovia a na druhom brehu dvaja týpci. Taktiež vyhovuje možnosť *ST*. Takže sa môžeme vybrať jednou z týchto dvoch ciest, ale v oboch prípadoch nám po návrate zostane na druhom brehu T. Prečo je to tak? Pri možnosti *TT* sa určite vráti *T*. Pri možnosti *ST*, ak by sa mal vrátiť *T*, tak na prvom brehu by boli po jeho návrate traja *T* a dvaja *S*, čo veru nie je ani trošku dobré. Takže v tomto prípade sa vráti *S* a na druhom brehu zostane *T*.

Teraz máme situáciu, že na prvom brehu sú traja *S* a dvaja *T*. Ak by teraz odplávali dvaja *S*, na prvom brehu by zostal jeden *S* a dvaja *T*, ktorí by ho okradli. Ak by odišiel *ST*, na druhom brehu by boli dvaja T a jeden S. Ale ak by odplávali dvaja *T*, na prvom brehu by boli traja *S* a na druhom traja *T*, a to je jediná možnosť, ktorá sedí. Jednoznačne sa vráti jeden týpek, lebo návrat dvoch by bol úplne zbytočný, vrátili by sme sa na začiatok.

Na prvom brehu teda teraz máme troch *S* a jedného *T*. Pri prevoze *ST* by na druhom brehu bola presila týpkov, takže nám ostala možnost *SS* (lebo *TT* byť nemôže, kedže je tam len jeden týpek). Táto možnosť sedí, lebo na prvom brehu bude *TS* a na druhom *TTSS*. Teraz si musíme uvedomiť, že ak by späť išiel *T*, na prvom brehu by vznikla presila týpkov. Ak by šiel *S*, presila týpkov by bola na druhom brehu.Ak by šiel *TT*, presila týpkov je znova na prvom brehu. Ak by šli *SS*, bolo by to možné, ale tým by sme sa vrátili o krok dozadu. Bol to nás predošlý krok. Posledná možnosť, ktorú máme, je *ST*, a tá naštastie vyhovuje, lebo na prvom brehu teraz budú dvaja *T* a dvaja *S*. Ak by odišli dvaja *T*, na druhom brehu by boli traja *T* a jeden *S*. Ak by mali odísť *ST*, šli by sme o krok dozadu. Teda máme možnost *SS*, ktorá aj vyhovuje. Pritom naspäť musí ísť týpek, lebo vo všetkých iných možnostiach vznikne prevaha týpkov na jednom z brehov. Zamyslite sa nad tým :).

Na prvom brehu tak zostali traja týpci. Teda dvaja z nich sa preplavia na druhý breh. Tam budú potom dvaja týpci a traja synovia. Jeden z nich všetkých, teda buď syn alebo týpek, sa vráti po posledného týpka a spoločne sa preplavia na druhý breh. Teraz sú tu už všetci, teda úloha je vyriešená.

Komentár. Úlohu ste, jedným slovom povedané, zvládli. Niektorí horšie, niektorí lepšie. Vo vašich riešeniach bolo niekoľko opakovaných chýb. V prvom rade ste sa poniektorí domnievali, že v lodičke stále niekto musí byť, čo nebola pravda. Ďalej, keď ste preplavili dvoch týpkov na druhý breh, povedali ste, že vystúpi len jeden z nich. Teda prevaha nevznikla, ale keby vystúpili obaja, nebolo by tomu tak. Ale toto som vám, bohužiaľ, uznať nemohla, bodíky šli dole. Lebo keď sa na to pozriete zo strany toho týpka, bolo by preňho výhodnejšie vystúpiť, aby niečo zarobil. Veď potom by sa do tej loďky vrátil. Iné by bolo, keby to bolo na rozhodnutí syna, či vystúpi alebo nie. Veď nebude taký hlúpy, aby sa nechal okradnúť. Toto som pre vaše štastie s odretými ušami uznala. Pôvodne to tak myslené totiž nebolo. Posledná chyba, ktorá sa miestami vyskytla, bola tá, že na druhý breh ste nepreplavili vsetkých týpkov, len synov. Za to šiel bodík dole. Ale inak to bolo celkom fajn. Ked vám to teraz náhodou nevyšlo, nevešajte hlavu, nabudúce to bude istotne lepšie. Veď všetci ste sa tak skvelo snažili. Tak vela šťastia do ďalšej série.

3 opravovala **Alexik Kuncová** a **Nikuš Špesová**

najkrajšie riešenia: František Lami, Berenika Tužilová

21 riešení

Podľa zadania si vieme zapísať, že pre kód platí :

$$\begin{array}{r} 1abc\ldots xy \\ \underline{.\qquad 3} \\ abc\ldots xy1 \end{array}$$

Nevieme, koľko cifier má kód, tak si to zapíšeme pomocou nejakého počtu neznámych. Zo zadania úlohy vieme, že trojnásobok kódu končí cifrou 1. Kedže vieme, že poslednú cifru výsledku ovplyvňuje len posledná cifra kódu, musí trojnásobok cifry y končiť cifrou 1. Takto zistíme, že cifrou y môže byť len cifra 7, ktorej trojnásobok je 21 (1 zapíšeme a 2 sa zvýši). Za cifru y (posledná cifra v kóde a predposledná cifra v trojnásobku kódu) si teda dosadíme cifru 7 a v zápise to bude vyzerať takto:

$$\begin{array}{r} 1abc\ldots x7 \\ \underline{.\qquad 3} \\ abc\ldots x71 \end{array}$$

Ďalej budeme postupovať rovnakým spôsobom, odzadu, až kým sa nedopracujeme k cifre 1, kde si overíme, či dané číslo ako kód vyhovuje. Keby sme si vypísali všetky násobky čísla 3 s ciframi 0-9, všimli by sme si, že každý končí inou cifru, v čom spočíva jednoznačnosť tejto úlohy.

Vidíme, že trojnásobok cifry x musí končiť na 5 (7 - zvyšok 2 z predchádzajúceho kroku), čo môže byť len cifra 5, ktorej trojnásobok je 15 (5+2 zapíšeme a 1 sa zvýši). Za cifru x (predposledná cifra v kóde a cifra na mieste stoviek v trojnásobku kódu) dosadíme 5:

$$\begin{array}{r} 1abc\ldots57 \\ .\qquad 3 \\ \hline abc\ldots571 \end{array}$$

Trojnásobok nasledujúcej cifry musí končiť cifrou 4 (5 - zvyšok 1), čo môže byť len cifra 8, ktorej trojnásobok je 24 (4+1 zapíšeme a 2 sa zvýši). Zapíšeme ju na náležité miesta:

$$\begin{array}{r} 1abc\ldots857 \\ .\qquad 3 \\ \hline abc\ldots8571 \end{array}$$

Trojnásobok nasledujúcej cifry musí končiť cifrou 6 (8 - zvyšok 2), čo môže byť len cifra 2, ktorej trojnásobok je 6 (6+2 zapíšeme a nič sa nezvýši):

$$\begin{array}{r} 1abc\ldots2857 \\ .\qquad 3 \\ \hline abc\ldots28571 \end{array}$$

Trojnásobok nasledujúcej cifry musí končiť cifrou 2 (2 - zvyšok 0), čomu vyhovuje len cifra 4, ktorej trojnásobok je 12 (2+0 zapíšeme a 1 sa zvýši):

$$\begin{array}{r} 1abc\ldots42857 \\ .\qquad 3 \\ \hline abc\ldots428571 \end{array}$$

Trojnásobok nasledujúcej cifry musí končiť cifrou 3 (4 - zvyšok 1), čo môže byť len cifra 1, ktorej trojnásobok je 3 (3+1 zapíšeme a 0 sa zvýši). Keďže sme došli k našej cifre 1, overíme, či trojnásobok sedí:

$$428571 : 3 = 142857$$

Našli sme teda hľadaný kód, ktorým je číslo 142857.

Komentár. Väčšina z vás nás milo prekvapila nielen správnym, ale dokonca aj originálnym riešením. Za drobné chybičky či nedostatočný slovný komentár sme strhávali body podľa závažnosti. Chceli by sme upozorniť najmä na rozdiel medzi 1.3, čo môžeme zapísať ako $1 + 1 + 1 = 3$ a 1^3, čo sa pre zmenu zapisuje ako $1.1.1 = 1$. V tejto úlohe išlo o trojnásobok čísla, takže $3.x$, kde x je hľadané číslo. Niektorí sa snažili úlohu riešiť metódou "skúsim, či sedí", čo v tomto prípade nebola teda najšťastnejšia voľba, kedže číslo 142857 je dosť veľké a ani overovanie 50 možností nie je málo.

4 opravovala **Hanka Jergušová** a **Nika Macková**

najkrajšie riešenia: Lenka Mareková, Vladimír Geľo

31 riešení

Ako prvé si k daným percentám v zadaní úlohy priraďme konkrétne hodnoty.

Vieme, že žien je polovica z 20000, čiže 10000. Podľa percent teraz dopočítajme, koľko žien má dané vlastnosti:

85% žien má dlhé vlasy = 8500 žien
75% žien má orieškové vlasy = 7500 žien
90% žien je slobodných = 9000 žien
70% žien vie tancovať = 7000 žien

Keďže spolu máme v háreme 10 000 žien, tak:

Ak 8500 žien má dlhé vlasy, potom zvyšných 1500 žien nemá dlhé vlasy.

Ak 7500 žien má orieškové oči, potom zvyšných 2500 žien nemá orieškové oči.

Ak 9000 žien je slobodných, potom zvyšných 1000 žien nie je slobodných.

Ak 7000 žien vie tancovať, potom zvyšných 3000 žien nevie tancovať.

Teraz už vieme, koľko žien nemá jednotlivé vlastnosti. Ostáva nám už len zistiť, koľko môže byť najviac žien, ktoré nemajú aspoň jednu z týchto vlastností. Maximálne je takýchto žien 8000. To je vtedy, keď každej z nich chýba práve jedna vlastnosť.

Potom tých, čo majú všetky vlastnosti, je zvyšok, čiže minimálne 2000.

Komentár. Väčšina z vás úlohu pochopila dobre a aj na jej riešenie išla správne. Niektorí ju však vyriešili iba čiastočne, napr. si zobrali 100%, od nuly nahor nakreslili 75% a od 100 nadol nakreslili 70%. Prienik, teda 45% = 4 500 žien, považovali za výsledok - žiaľ, takto nedošli k najmenšiemu možnému počtu.

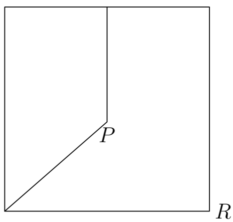
5 opravovali **Kubo Jursa** a **Martin "Poli" Polačko**

najkrajšie riešenia: Ivana Gašková, Iveta Lederová

18 riešení

Našou úlohou bolo vypočítať plochu menšej, Žofinej casti. Z obrázka vidíme že je to tá vpravo, preto vypočítame jej obsah, a ak bude menší ako polovica celého štvorca, je to časť ktorá patrí Žofi.

1. riešenie



Skôr než začneme riešiť obsahy, vypočítajme stranu štvorca. Štvorec má obsah 100 árov. Mnohí z vás napísali, že má stranu 10 árov. Ár je ale jednotka plochy, nie dĺžky. 100 árov je 10 000 m^2 teda strana štvorca je 100 m.

Označme si vrcholy štvorca Q, R, S, T. Bod P je pomarančovník zo zadania, X stred strany QR a Y stred ST. Bod P je podľa zadania rovnako vzdialený od rohov štvorca Q, R. Bod P teda leží na osi strany QR (priamke kolmej na stranu, ktorá prechádza jej stredom). Rieka na úseku YP tiež leži na osi strany QR, lebo zo zadania je kolmá na stranu z ktorej vyteká a teda aj na stranu protilahlu, teda QR. Rieka je teda časťou osi strany QR a od oboch zvyšných strán vzdialená 50 m. Útvar $QPYT$ je lichobežník. Vieme že obsah lichobežníka je polovica súčtu základní krát výška. Zo zadania, v našom lichobežníku, vieme dlžku jednej základne 100 m a výšku 50 m, ešte ale nepoznáme druhú základňu. Tú môžeme vypočítať z trojuholníka QPX. Tento trojuholník je pravouhlý (úsecka XY je kolmá na QR). V pravouhlých trojuholníkoch platí pytagorova veta: $a^2 + b^2 = c^2$. Kde a, b sú odvesny trojuholníka a c je jeho prepona.

Zo zadania vieme, že $|QP| = |PY|$ oznacme si túto dlžku x. Strana $|XY| = 100$ m, $|YP| = x$ teda $|PX| = |XY| - |YP| = 100$ m $-$ x. V trojuholníku QPX mám teda strany s dlžkami $|QX| = 50$ m, $|XP| = 100$ m $-$ x, $|PQ| = x$.

Z pytagorovej vety:

$$
\begin{aligned}
|PQ|^2 &= |QX|^2 + |XP|^2 \\
x^2 &= 50^2 + (100 - x)^2 \\
x^2 &= 2\,500 + 10\,000 - 200x + x^2 \\
x &= \frac{12\,500}{200} \\
x &= 62,5 \text{ m}
\end{aligned}
$$

Máme teda druhú základňu lichobežníka $QPYT$. Teraz už jednoducho vypočítame jeho obsah.

$$
\begin{aligned}
S &= (a + c).\frac{v}{2} \\
S &= (100 + 62,5).\frac{50}{2} \\
S &= 4\,062,5 \text{ m}^2 \\
S &= 40,625 \text{ árov}
\end{aligned}
$$

Čo je menej ako polovica, takže $QPYT$ je určite Žofin pozemok.

Toto riešenie sa opiera o znalosť pytagovej vety. Existuje však riešenie ktoré pytagorovu vetu nepoužíva.

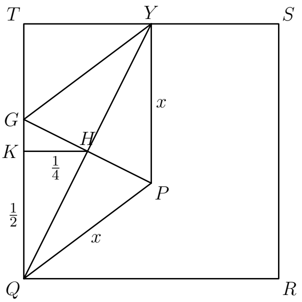
2. riešenie

Pytagorovou vetou sme vypočítali stranu $|PQ| = |YP|$. Ukážeme, ako sa dá vyrátat strana $|PQ|$ bez pytagorovej vety.

Zo zadania vieme, že $|PQ| = |YP| = x$. Skúsme doplnit body Q, F a Y na kosoštvorec. Kedže YP je rovnobežné s QT, štvrtý vrchol kosoštvorca leží na strane QT. Označme ho G. Dokreslime ešte uhlopriečky kosoštvorca $QPYG$, ich priesečník označme H.

Na obrázku teraz môžeme nájsť niekoľko navzájom zhodných, alebo podobných trojuholníkov. Napríklad uhlopriečky QY a PG rozdeľujú kosoštvorec $QPYG$

na štyri zhodné trojuholníky. Pre nás budú zaujímavé hlavne trojuholníky QPH a QGH.



Spusťme kolmicu z bodu H na stranu QT a jej pätu označme ako K. Trojuholníky QKH a QTY sú podobné (podľa vety uu, uhly QKH a QTY sú oba pravé, uhly KQH a TQY sú očividne zhodné). Uhlopriečky sa v kosoštvorci rozpoľujú a sú na seba kolmé (premyslite si to sami prečo je to tak).

Preto $|QH| : |QY| = 1 : 2$, takže aj pomer ostatných dlžok strán je $1 : 2$. Preto ak $|QT| = y$, tak $|QK| = \frac{1}{2}y$, kedže $|TY| = \frac{1}{2}y$, tak $|KH| = \frac{1}{4}y$.

Pozrime sa teraz bližšie na trojuholník HKG. Je tiež podobný s trojuholníkmi QTY a QKH?

Skúsme sa zamerať na jeho uhly. Bod K sme si zvolili tak aby $|\sphericalangle HKG| = 90^\circ$. Navyše $|\sphericalangle KHG| = 90^\circ - |\sphericalangle KGH| = 90^\circ - |\sphericalangle QGH| = |\sphericalangle GQH| = |\sphericalangle KQH|$,

Takže trojuholníky HKG a QKH majú navzájom zhodné uhly, preto sú podobné. Pritom strane QK (dlžky $\frac{1}{2}y$) zodpovedá strana HK (dlžky $\frac{1}{4}y$), takže pomer podobnosti je opät $1 : 2$.

Na základe toho potom vieme odvodit, že kratšej odvesne KH v trojuholníku QKH dlžky $\frac{1}{4}y$ zodpovedá kratšia odvesna KG v trojuholníku KHG, takže $|KG| = \frac{1}{2}y . \frac{1}{4}y = \frac{1}{8}y$.

Potom $x = |QP| = |QG| = |QK| + |KG| = \frac{1}{2}y + \frac{1}{8}y = \frac{5}{8}y$. Čo je nami vypočítaná hodnota z pytagorovej vety, $x = 62,5$ m. Ďalej je už postup rovnaký.

Komentár. Riešitelia ktorí vedeli pytagorovu vetu väčšinou prišli k správnemu výsledku. Tí čo ju nevedeli si buď tipli dlžku QP len tak, iní ju merali, další sa na nu snažili príst cez kružnicu opísanú trojuholníku QRY. Táto úloha bola pri neznalosti pytagorovej vety skutočne tažká a preto sa týmto ospravedlňujeme siedmakom.

6 opravovala **Zuzka Ceľuchová**

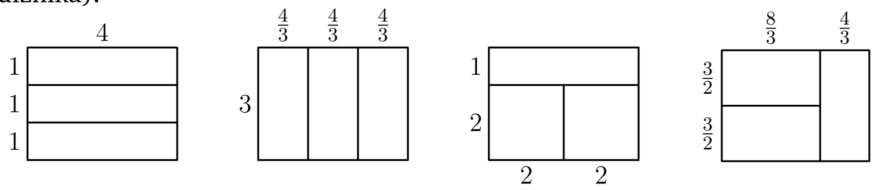
najkrajšie riešenia: Martin Vodička, Jozef Lami, František Lami

31 riešení

Na začiatok je dobré porozmýšľať, čo všetko nám ovplyvňuje veľkosť súčtu obvodov obdĺžnikov, ktoré dostaneme delením pôvodného obdĺžnika. Ak skúsime vyrátať niekoľko takýchto súčtov, nie je veľmi ťažké všimnúť si, že obvod pôvodného obdĺžnika do tohto súčtu zarátame vždy práve raz (keďže niektoré strany malých obdĺžnikov ležia na stranách veľkého obdĺžnika) a dĺžky úsečiek, ktorými obdĺžnik rozdelíme, zarátame do nášho súčtu dvakrát (každá z týchto úsečiek tvorí stranu v dvoch obdĺžnikoch, preto v súčte obvodov bude dvakrát). Pritom obvod pôvodného obdĺžnika nijako nezmeníme, ten je stále $2(3 + 4)$ m $= 14$ m. Dĺžky deliacich úsečiek sú ale pri rôznych deleniach rôzne. Úplne nám preto postačí nájsť také delenie, pri ktorom súčet dĺžok úsečiek, ktorými obdĺžnik rozdelíme, bude najmenší možný. Táto úvaha, samozrejme, pre vyriešenie úlohy nie je nutná, ale sami uvidíte, že si tým možno výpočty riadne zjednodušiť :).

Máme nájsť najmenší možný súčet obvodov. Ak máme ukázať, že je niečo najmenšie možné, máme dve možnosti: buď ukážeme (nejako všeobecne), že keby sme vybrali hocijakú inú možnosť, nebude menšia ako tá naša, alebo skrátka vypíšeme všetky možnosti a vyberieme tú najmenšiu. Prvý spôsob riešenia je pekný a často sa využíva v úlohách, kde vypísať všetky možnosti je nemožné alebo príliš komplikované. Treba ale potom dávať pozor na to, aby sme nesklĺzli do toho, že vyhlásime „Toto je najlepšie riešenie, a basta!“ Nie, nie, to nestačí. Všetko treba riadne zdôvodniť. Často je to ťažké, no nebojte sa, naučíte sa takéto zdôvodnenia vymýšľať sami. V našom prípade možností nie je až tak veľa, preto oveľa jednoduchším riešením je naozaj ich všetky prevetrať a vybrať z nich tú najlepšiu. Poďme teda na to.

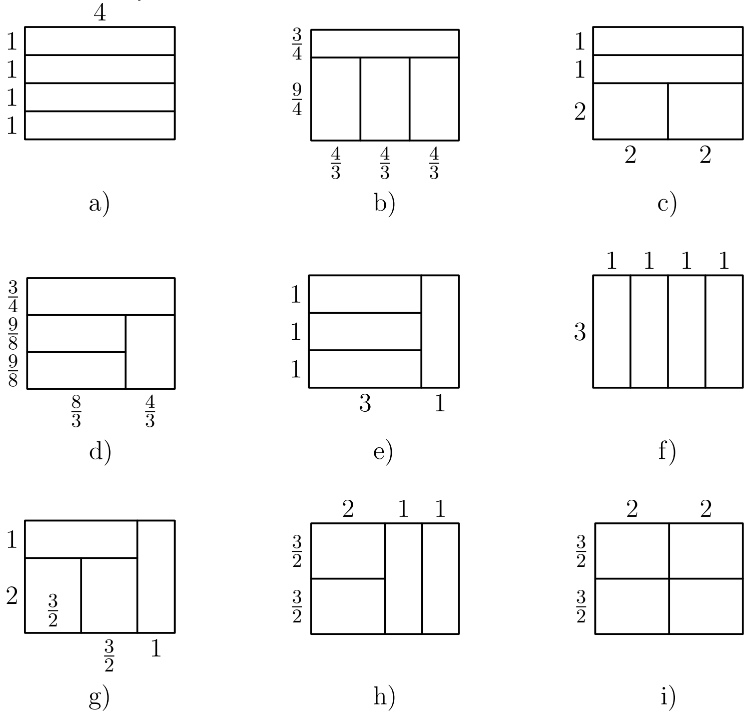
a) Celý obdĺžnik má obsah $S = 3 \cdot 4 = 12$ m^2. Potrebujeme ho teda rozdeliť na obdĺžniky s obsahom 12 m^2 : 3 = 4 m^2. Vďaka tomu, že poznáme obsah jedného malého obdĺžnika, vieme ľahko dopočítať jeho strany. Načrtneme si teraz jednotlivé delenia (pozn. aj štvorec budeme považovať za špeciálny prípad obdĺžnika).



a) b) c) d)

Sú to naozaj všetky možnosti? Prečo? Všimnime si, že aspoň jedna deliaca úsečka musí byť zhodná s jednou alebo druhou stranou veľkého obdĺžnika, tzn. „prereže“ ho po celej šírke, prípadne dĺžke. Keby to tak nebolo, dostali by sme nutne viac ako tri obdĺžniky (skúste si to nakresliť!). Druhú deliacu úsečku potom môžeme nakresliť rovnobežne s prvou, alebo kolmo na ňu. Viac možností teda ozaj niet. Nájsť najlepšie delenie je už potom jednoduché - súčet dĺžok deliacich čiar je a) 8 m, b) 6 m, c) 6 m a napokon d) $5\frac{2}{3}$ m. Najmenší súčet obvodov budú mať teda obdĺžniky pri delení d).

b) v tomto prípade obsah našich malých obdĺžnikov bude 12 m^2 : 4 = 3 m^2. Pokúsme sa aj tu nájsť všetky možnosti delenia. Úloha je o čosi ťažšia, keďže máme dostať až 4 obdĺžniky. Môžeme si ju ale zjednodušiť. Nájdeme najskôr všetky také delenia, v ktorých opäť platí, že jedna deliaca čiara je zhodná s niektorou zo strán pôvodného obdĺžnika. Ako ich budeme hľadať? Najskôr „odrežeme“ jeden obdĺžnik takouto čiarou. Dostaneme tak jeden obdĺžnik s obsahom 3 m^2 a jeden väčší obdĺžnik (prípadne štvorec), ktorý máme ešte rozdeliť na tri obdĺžniky s rovnako veľkým obsahom. Obdĺžnik máme rozdeliť na tri obdĺžniky s rovnakým obsahom? Takúto úlohu sme ale predsa riešili v úlohe a)! Vieme, že to vieme urobiť štyrmi spôsobmi. To znamená, že máme štyri možnosti, ako rozdeliť obdĺžnik na štyri obdĺžniky, ak „prvý rez“ bol vodorovný (obrázky *a*) až *d*)) a štyri možnosti, ak „prvý rez“ bol zvislý (obrázky *e*) až *h*)). Okrem týchto možností môžeme ešte urobiť jednu deliacu čiaru zhodnú s jednou stranou pôvodného obdĺžnika, druhú s druhou - obrázok *i*).



Ostáva ešte otázka, či sa môže stať, že žiadna z deliacich úsečiek nebude zhodná so žiadnou zo strán obdĺžnika (inými slovami, že všetky budú kratšie ako strany pôvodného obdĺžnika). To už nechám na vás. Pokúste sa nájsť také delenie. Stačí si len kresliť, kresliť, kresliť... a riešenie sa ukáže samo - také delenie neexistuje (skúste si dobre premyslieť, prečo je to tak). To znamená, že nám stačí preveriť našich deväť možností. Súčty dĺžok deliacich čiar v nich sú nasledovné: a) 12 m, b) $8\frac{1}{2}$ m, c) 10 m, d) $8\frac{2}{3}$ m, e) 9 m, f) 9 m, g) 8 m, h) 8 m, i) 7 m. Riešením je teda delenie *i*).

Komentár. Väčšina z vás narazila na problémy pri vypisovaní všetkých možností, na mnohé možnosti ste zabudli. Za to šli bodíky dolu. Mnohí z vás robili aj tú chybu, že sa snažili hľadať riešenia len medzi obdĺžnikmi, ktorých dĺžky strán sú celočíselné. To vás ale veľmi obmedzilo, veľa možností sa tým stratilo, medzi nimi aj tie, ktoré boli výsledkom úlohy... a to je škoda. Čo z toho vyplýva? Zadanie treba čítať pozorne. Ak tam nie je napísané nič o celočíselných stranách, nemusíme hľadať len obdĺžniky s celočíselnými stranami. Držím palce pri ďalšom riešení!

Zadania 2. série úloh

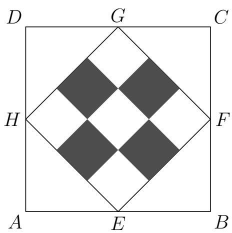
Úlohy pošlite najneskôr **3. decembra 2007**

V minulej časti ste sa dozvedeli: Traja bratia sa vydali na dlhú cestu za otcovým vynálezom. Vyskúšali ho a dostali sa niekam do dávnej minulosti (asi o 47 storočí späť :), kde sa spoznali s Fati a Žofi, ktoré im darovali čarovný lietajúci koberec. Leteli tak 500-600 metrov nad zemou cez rozbúrené oblaky, ponad šíre púšte, vysoké hory, cez 7 oceánov a 7 kontinentov, ponad 130 riek a 127 krajín, okolo 22 veží, 47 domčekov a stromčekov... „Hurááá! Pristávame!“ ... a zrazu sa ocitli na akomsi neznámom ostrove. Po poľných cestičkách plných blata sa premávali starodávne koče. Ľudia žili v malých drevených chalúpkach bez takých moderných vymožeností ako elektrina a kúrenie. Bol to síce biedny život, ale nejako sa to dalo prežiť. Ľudia boli k sebe priateľskí, až na to, že niekedy hovorili pravdu a inokedy klamali.

Úloha 1. *Na ostrove žijú idealisti (vždy hovoria pravdu), materialisti (vždy klamú) a oportunisti (niekedy klamú a niekedy hovoria pravdu, podľa toho, čo sa im hodí).*
a) stretli ste 2 ľudí, ktorí navzájom poznajú svoje filozofické založenie, pričom každý z nich je iný. Viete zistiť, kto je kto?
b) stretli ste 3 ľudí, ktorí navzájom poznajú svoje filozofické založenie, pričom každý z nich je iný. Viete zistiť, kto je kto?
(Môžete im klásť otázky typu Áno – Nie, ktoré sa ich týkajú, ale nie otázky typu: je 1+1 dva?)

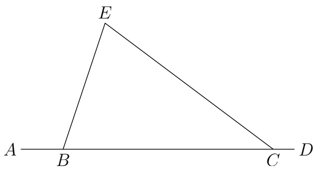
Keď si naši traja bratia urobili prehľad o obyvateľstve, ich dobrodružstvo pokračovalo. Naliali do koberca palivo a pobrali sa ďalej na svojej ceste do neznáma. Leteli dlho, dlho, veľmi dlho. Ešte stihli preletieť okolo niekoľkých mrakodrapov, keď tu zrazu si všimli, ako sa na nich valí prietrž mračien. Navôkol nebola žiadna pevnina na pristátie, a tak im nezostávalo nič iné ako pridať plyn a prizerať sa, ako sa rútia do ukrutnej búrky. Oblohu zaliala čierno-čierna tma, blesky sa prebíjali cez mohutné oblačné útvary a zároveň im svietili na cestu. „Ooooooooo! Zem! Zem! Rýchlo! Choď dole, ty stará kraksňa!“ pokúšali sa nejako korigovať „čarovný“ koberec, ale akosi im to nešlo a unášal ich ďalej nad spomínanou pevninou. Náš milý koberec si ráčil pristáť až na budove, ktorá mala namiesto strechy niečo ako pristávaciu dráhu tvaru štvorca.

Úloha 2. *Body E, F, G a H sú stredmi strán štvorca ABCD. Štvorec EFGH je rozdelený na deväť rovnakých častí (ako na obrázku). Koľko percent z celkovej plochy štvorca ABCD reprezentuje tmavo vyznačená časť štvorca?*



Náš milý koberec im spôsobil už dosť škody, a tak ho radšej nechali tam a vybrali sa preskúmať terén. Pozreli sa doprava, doľava... dopredu, dozadu... a zrazu zbadali jeden komín. Tak sa k nemu rozbehli a keďže nevideli žiaden iný únikový východ, spomenuli si na Santa Clausa a skočili dnu :D ... „Ahojte detičkýýý, prišli sme vás navštíviť a nesieme vám darčekýýý... ale nie, teraz vážne. Konečne sme stretli nejakých ľudí a postupne sa tí ľudia približujú k našej dobe. Ale vôbec netušíme, čo sa tu deje. No, vlastne trošku tušíme, ale to by ste nám asi neuverili. Mimochodom, aký je teraz rok...?“ „Teraz je rok 2007, ak sa nemýlim,“ ozvalo sa isté dievča v tretej lavici. Chlapci sa z komína prešmykli do istej triedy v istej škole v istom meste. Všetci boli z nezvyčajnej návštevy vyhúkaní, ale určite nie viac ako z príkladu, ktorý počítali na hodine matiky.

Úloha 3. *V trojuholníku BCE je* $|\sphericalangle EBC| < |\sphericalangle ECB|$. *Vieme, že* $|\sphericalangle ABE| = 4x+y$, $|\sphericalangle BEC| = 84$ *a* $|\sphericalangle ECB| = x + y$. *Určte, aké celočíselné hodnoty môže mať* y.



Našťastie to bola posledná hodina, a keďže láska ide cez žalúdok, nikto nemal čas zapodievať sa bytosťami z budúceho storočia, lebo každý sa opantaný hladom hrnul na obed... až na dvoch študentov: dievča z tretej lavice a jej spolusediaceho, a tak sa dali spolu do debaty. „Takže teraz je rok 2007?“ „No áno, ak sa nemýlim, ale prečo sa vám to zdá také čudné? Správate sa, ako keby ste spadli z inej dimenzie.“ „No... vyzerá to tak, že aj hej... lebo u nás je práve rok 3207. Začalo sa to všetko tým, že náš otec (známy vedec) sa rozhodol, že si patentuje svoj najdokonalejší vynález ČASOSTROJ. Vďaka nemu sme prešli už asi celými dejinami ľudstva. Aha, sorry, v praveku sme ešte neboli. Potom nám v Oriente dajaké 2 čaje darovali čarovný koberec, ktorý nás doviezol až sem. Teraz sme vo vašej prítomnosti a v našej minulosti. Asi tak. “ „Woooooow, to je jaké dzive,“ pridal sa do rozhovoru ďalší chalan. „Mimochodom, ja som Tomáš a toto je Aďa.“ „Prosím, pomôžte nám. Vieme, že nás nedopravíte naspäť domov (ak sa tam ešte niekedy vôbec dostaneme), ale aspoň nám to tu poukazujte, aby sme nezablúdili. A vy ste súrodenci?“ „Nie, ale sme susedia a okrem toho aj veľmi dobrí kamoši, ale mám doma jedného malého... o-ou! Rýchlo, Aďa, makáme domov, lebo ma naši roztrhnú! Mal som strážiť brata!“ a tak sa všetci piati pobrali k Tomášovi domov.

Úloha 4. *Tomáš a Aďka majú domy, ktorých čísla sú dvojciferné prvočísla. Každá zo štyroch číslic, ktoré sú v nich použité, je iná. Ak tieto čísla domov sčítame, výsledné dvojciferné číslo obsahuje ďalšie číslice, rôzne od všetkých predchádzajúcich. Navyše, to isté sa dá povedať, ak spravíme rozdiel čísel domov. Robko zistil, že číslo domu Lucie je zložené zo zvyšných číslic a navyše je to prvočíslo. Aké je číslo domu, v ktorom býva Lucia?*

Lenže chudáci chlapci, nemali čo jesť ani kde spať, a tak sa dobrá duša Aďa ponúkla, že sa o nich postará a dovolila im u nej prespať. No a Tomáš... ten radšej utekal domov k bráškovi. „Cŕŕŕn, cŕŕŕn...no tááák...otvor mi, ty krpec!“ „Kto jeé? Stašidó...Tomas to si ty? Otvoíííím...ae najpv mi pomôžeš poskladať dačo z kociek a keď ne, ti neotvoíííím!!!“

Úloha 5. *Jožko sa hrá so svojimi kockami tak, že z nich vytvára rôzne obdĺžnikové* *tvary. (Napríklad na obdĺžnik* 5×7 *potrebuje* 35 *dielov a takisto z nich vie vytvoriť aj obdĺžnik* 7×5*). Jožko chce vytvoriť deväť rôznych obdĺžnikových obrazcov s tým, že použije všetky kocky. Aký je najmenší počet kociek, z ktorých to dokáže?*

Tomáš túto úlohu zvládol ľavou zadnou a vošiel do domu. Na druhý deň sa všetci stretli na ulici a išli spolu do školy. Začali im rozprávať o istom matematickom seminári KITAM, kde stačí, ak vyriešite jednu úlohu a čaká vás veľké prekvapenie. Tak to skúste:

Úloha 6. *Janka raz večer nemala čo robiť, a tak si zapisovala do zošita obsahy štvorcov s celočíselnou dĺžkou strany. Postupne tak zapísala čísla* $1, 4, 9, \ldots 100, 121, \ldots$. *Keď sa lepšie prizrela na čísla, ktoré dostala, všimla si, že väčšina má párne i nepárne číslice, zopár má len párne. Len* 1 *a* 9 *boli také, ktoré majú len nepárne číslice. Rozmýšľala, prečo je to tak a zrazu vykríkla: „Jasné, veď len tieto dve sú také, že obsahujú len nepárne číslice.“ Je to naozaj tak? Ak áno, skúste vymyslieť, prečo.*

Úlohu ste iste hravo vyriešili, a tak sa na vás tešíme na sústredku! Pápá =)

Poradie po 1.sérii

PS je súčet bodov za predchádzajúce série, **1–6** sú body za jednotlivé úlohy, **P** je prémia závislá od ročníka podľa pravidiel a **CS** je celkový súčet bodov.

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	PCS
1. – 3.	František Lami	8. C	ZNov2KE	0	9	9	9	9	9	9	54
	Martin Vodička	Tercia	GAlejKE	0	9	9	9	9	9	9	54
	Jozef Lami	9. A	ZNov2KE	0	9	9	9	9	9	9	54
4. – 5.	Berenika Tužilová	7. A	ZKro4KE	0	9	9	9	9	8	5	53
	Patrik Turzák	7. A	ZKro4KE	0	9	8	9	9	9	4	53
6. – 7.	Denisa Semanišinová	Tercia	GAlejKE	0	9	9	9	3	6	8	50
	Lenka Mareková	7. A	ZKro4KE	0	8	9	6	8	9	7	50
8.	Jaroslav Petrucha	Tercia	GMetoBA	0	9	4	9	9	-	9	49
9.	Iveta Lederová	8. B	ZKro4KE	0	7	-	9	5	9	7	42
10.	Vladimír Geľo	Kvarta	ZŠverSV	0	9	9	7	5	9	1	40
11.	Zuzana Takáčová	8. A	ZRehoKE	0	9	9	6	9	1	3	39
12.	Viktor Futó	V.A	ZBrusKE	0	6	-	-	9	9	5	38
13. – 15.	Júlia Lengvarská	8. B	ZHutnSN	0	7	4	6	9	6	3	36
	Richard Pisko	8. A	ZKro4KE	0	7	5	-	5	9	5	36
	Ivana Gašková	Kvarta	GAlejKE	0	9	4	3	8	9	3	36
16. – 18.	Viktória Valachová	7. A	NULL	0	7	8	7	2	3	1	35
	Ján Jursa	7. A	ZKro4KE	0	-	9	-	4	9	4	35
	Jakub Kireš	9. B	ZStanKE	0	9	8	-	9	9	-	35
19. – 21.	Daniel Till	9. A	ZAngeKE	0	9	4	5	4	7	4	33
	Viktória Baranová	7. A	ZKuzmic	0	7	9	-	3	3	2	33
	Veronika Vašková	9.C	ZDargHE	0	8	4	8	2	8	3	33
22.	Daniel Ondra	7. A	ZKro4KE	0	8	5	-	3	7	1	32
23. – 24.	Alexandra Dupláková	7. A	ZKro4KE	0	4	4	3	4	8	2	31
	Miroslav Stankovič	7. A	ZKro4KE	0	8	8	1	2	3	2	31
25.	Filip Sakala	9. C	ZDargHE	0	8	9	1	2	3	3	26
26.	Jakub Dopirák	7. A	NULL	0	6	8	0	2	-	1	25
27.	Natália Nosálová	7. A	ZKomeSV	0	3	5	-	1	2	1	17
28. – 29.	Mária Takáčová	8. A	ZRehoKE	0	-	-	-	9	0	1	10
	Maroš Lukáč	8. B	ZKuzmic	0	7	-	-	2	-	1	10
30.	Dominika Todáková	NULL	NULL	0	3	-	-	1	3	1	8
31.	Kamil Butala	8. A	ZHrnčSP	0	1	4	0	1	0	1	7
32.	Katarína Knapová	8. A	ZRehoKE	0	-	-	-	2	-	1	3

Za podporu a spoluprácu ďakujeme:

Korešpondenčný matematický seminár **MATIK**
Číslo 2 • Zimná časť 21. ročníka (2007/08) • Vychádza 8. novembra 2007
Internet: `http://matik.strom.sk` • E-mail: `matik@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1
Internet: `http://www.strom.sk` • E-mail: `zdruzenie@strom.sk`