MALYNÁR

Číslo 3 • december 2011 **Zimná časť 21. ročníka**

http://malynar.strom.sk

Čaute Malynárčatá!

Síce k nám ešte nezavítali poriadne snehové vločky ani extrémne mrazy, čo by nakreslili kvety na okná domov a ostrým chladom cencúľov ozdobili ich strechy, nemajte žiadne obavy, zima už stojí vo dverách. To sa iba Perinbaba pozerala do jej krištáľovej gule, ako vám to celý ten čas bystro počítalo, a zabudla nám pri tom zasnežiť na perine a prifúknuť kúsok skutočnej zimy.

Ani my sme nezaháľali! Pilne sme pracovali na poslednom časáku zimnej malynárskej časti, tak nech je vám odmenou. Mnohí z vás už určite viete, čo to znamená: najlepší, tešte sa na sústredko plné zážitkov v Inovciach! Tí, čo vám to v tejto sérii trocha nevyšlo, nezúfajte a skúste druhú. Predsa len už budete o čosi múdrejší a určite sa vám ju podarí zvládnuť podľa vašich predstáv. Máte ju tu za chvíľu, po zimných prázdninách!

Vaši Opravovatelia

Vzorové riešenia úloh 2. série Zimnej časti

Úloha č. 1:
opravovali Samuel Kočiščák & Robko Hajduk

Miloš Mičík

Zadanie: Námorníci mali na jednej kope tovar uložený v 96 škatuliach, ktorý museli prepraviť do ďalšieho mesta. Na druhej kope bolo množstvo prepraviek. Bolo zrejmé, že do jednej prepravky sa zmestí buď 8 veľkých alebo 10 malých škatúľ. Stihli sme si všimnúť len to, že veľkých škatúľ bolo viac ako malých. Posielali sa len plné prepravky, naložené jedným druhom škatúľ. V koľkých prepravkách teda poslali námorníci svoj tovar?

Riešenie: Spolu máme 96 prepraviek, niektoré sú malé, ostatné sú veľké. Nakoľko prepravky máme uložiť do krabíc tak, že každá krabica bude plná (bude v nej 8 alebo 10 prepraviek), počet veľkých prepraviek bude deliteľný 8 a počet malých prepraviek bude deliteľný 10. Ak má byť malých prepraviek menej ako veľkých, potom malých prepraviek je menej ako 48 (menej než polovica z 96). Teda malých prepraviek bude 0, 10, 20, 30 alebo 40.

- Ak bude malých prepraviek 0, veľkých prepraviek bude 96. Stačí overiť, či 96 veľkých prepraviek viem uložiť do krabíc po 8. A to viem spraviť tak, že ich uložím do 12 krabíc ($12 \cdot 8 = 96$).
- Ak bude malých prepraviek 10, veľkých prepraviek bude 86. Avšak 86 veľkých prepraviek viem uložiť do 11 krabíc (desať krabíc po 8 prepravkách a jedna krabica so 6 prepravkami). Takže 11. krabica nebude plná, a teda to nespĺňa podmienku, že všetky krabice budú plné.

- Ak bude malých prepraviek 20, veľkých prepraviek bude 76. Tie viem uložiť do 10 krabíc (deväť krabíc po 8 prepravkách a jedna krabica so 4 prepravkami). Takže 10. krabica nebude plná, a teda to nespĺňa podmienku, že všetky krabice budú plné.
- Ak bude malých prepraviek 30, veľkých prepraviek bude 66. Osem krabíc bude plných po 8 veľkých prepravkách, ale deviata krabica bude mať len 2 veľké prepravky. Čím podmienka, že všetky krabice budú plné, nie je splnená.
- Ak bude malých prepraviek 40, veľkých prepraviek bude 56. A tie viem dať do siedmich krabíc po 8 veľkých prepravkách.

Takže v prístave bolo buď 96 veľkých prepraviek, alebo 40 malých a 56 veľkých prepraviek. Ak spočítame krabice, do ktorých prepravky vieme zabaliť, zistíme, že v prvom prípade to bolo 12 a v druhom prípade 11 krabíc, do ktorých ich vieme zabaliť.

Komentár: Väčšina z vás našla len riešenie, v ktorom boli ako veľké, tak aj malé prepravky. Avšak tvrdenie v zadaní, že väčších prepraviek je viac ako menších, nevylučovalo možnosť, že tam žiadna malá prepravka nebude. Niektorí z Vás si to všimli a vypísali aj túto možnosť. Tých, ktorí tak nespravili, sme postihli maličkou stratou bodov. Existuje ešte jedno riešenie, a to 16 veľkých prepraviek a 80 malých prepraviek. Avšak toto riešenie nespĺňa podmienku, že veľkých prepraviek má byť viac ako malých prepraviek, a teda to nie je správne riešenie.

Úloha č. 2:

opravovali Lucka Čabrová & Ivka Sopatová

Samko Banas, Maťko Melicher

Zadanie: „Ten muž písal na zem čísla, pričom každé číslo bolo súčtom dvoch predchádzajúcich čísel a na začiatku boli dve jednotky. Pred nami sa vynímali čísla 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 a tak ďalej. Napísal až 1587 čísel. Bolo posledné číslo párne alebo nepárne? A vieš aj prečo?“

Riešenie: Vypíšme ďalšie čísla z tejto postupnosti:

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, \ldots$

Keďže úlohou je určiť, či 1587. číslo je párne (P) alebo nepárne (N), zapíšme, ako sa nám opakujú čísla vo vyššie vypísanej postupnosti.

Poradie:	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8 .	9.	10.	...	1587
Číslo:	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...	?
Párnosť:	N	N	P	N	N	P	N	N	P	N	...	?

Skúsme nájsť, ako to ďalej bude pokračovať. V úlohe vlastne sčítavame párne a nepárne čísla a sú štyri možnosti sčítania.

- (1+1=2) N+N=P. Ak sčítavame dve nepárne čísla, výsledok je vždy párny.

- (1+2=3) N+P=N. Ak sčítavame jedno nepárne a jedno párne číslo, výsledkom je nepárne číslo.
- (2+3=5) P+N=N. Ak sčítavame jedno párne a jedno nepárne číslo, výsledkom je nepárne číslo.
- (2+2=4) P+P=P. Ak sčítame dve párne čísla, výsledok je vždy párny.

Pri riešení úlohy využívane prvé tri možnosti a pri ich opakovanom používaní vieme určiť, či 1587. číslo je párne alebo nepárne. Ako vidno z tabuľky, každé tretie číslo je párne, čiže čísla na treťom, šiestom, deviatom, … mieste v tejto postupnosti sú párne.

Z toho vyplýva, že ak je číslo v poradí deliteľné troma bez zvyšku, je párne. 1587 : 3 = 527, bez zvyšku, čiže číslo na 1587. mieste postupnosti je párne.

Komentár: Úlohu, prekvapivo, riešili všetci z vás týmto spôsobom. Mnohí z vás však zabudli na to, že bolo potrebné dokázať tvrdenie, že každé tretie číslo je párne. Viacerých z vás tiež plietlo, že je to 1587. číslo v poradí, a nie že 1587 je hodnota čísla v rade.

Úloha č. 3:

opravovali Kristína „Krisa“ Faguľová & Patrik Turzák

Peter Zimovčák

Zadanie: „Princezná sa rozhodla, že si nájde múdreho a šikovného muža. Nápadník musel nájsť jej portrét, ktorý ukryla do jednej z troch truhlíc: zlatej, striebornej a olovenej. Na každú z nich napísala dva nápisy, pričom pytačom pravdivo povedala, že ani na jednej z nich nie je viac ako jedno nepravdivé tvrdenie. Na truhliciach bolo:

Zlatá: Tu portrét nie je. Portrét bol maľovaný v Benátkach.
Strieborná: Portrét nie je v zlatej truhlici. Portrét bol maľovaný vo Florencii.
Olovená: Tu portrét nie je. Portrét je v striebornej truhlici.

a) Ktorú truhlicu teda mal jej nápadník otvoriť, aby našiel portrét?

b) V druhej skúške boli na jednej z nich dve pravdivé tvrdenia, na druhej dve nepravdivé tvrdenia a na poslednej bolo jedno pravdivé tvrdenie a druhé nepravdivé.

Zlatá: Tu prsteň nie je. Prsteň je v striebornej truhlici.
Strieborná: Prsteň nie je v zlatej truhlici. Prsteň je v olovenej truhlici.
Olovená: Prsteň tu nie je. Prsteň je v zlatej truhlici.

V ktorej truhlici bol prsteň?“

Riešenie: V podstate máme dve možnosti, ako úlohu riešiť: môžeme urobiť rozbor tvrdení alebo si vyskúšať umiestnenie portrétu/prsteňa pre všetky možnosti.

Vyskúšaním možností:

a) Princezná povedala, že na truhliciach je vždy najviac jedno nepravdivé tvrdenie. To znamená, že tam dve nepravdivé tvrdenia byť nemôžu.

- Ak by bol portrét v zlatej truhlici, tvrdenie *Tu portrét nie je* by bolo nepravdivé a tak, aby boli splnené podmienky zadania, by musela byť druhá veta pravdivá, a teda portrét bol namaľovaný v Benátkach. Na striebornej truhlici by bolo tvrdenie *Portrét nie je v zlatej truhlici* nepravdivé, a tak by muselo byť pravdivé tvrdenie *Portrét bol namaľovaný vo Florencii.* Portrét by tak musel byť namaľovaný na dvoch miestach naraz, čo je nemožné, teda táto možnosť nie je správna a portrét v zlatej truhlici nie je.
- Ak by bol portrét v striebornej truhlici, tvrdenia *Portrét nie je v zlatej truhlici* na striebornej a *Tu portrét nie je* na zlatej truhlici by boli pravdivé. Takisto by bolo pravdivé tvrdenie *Prsteň tu nie je* na olovenej truhlici a *Portrét je v striebornej truhlici* by bolo pravdivé. Na každej truhlici tak je aspoň jedno pravdivé tvrdenie, teda táto možnosť zadaniu vyhovuje.
- Ak by bol portrét v olovenej truhlici, tvrdenie *Tu portrét nie je* na nej by bolo nepravdivé a takisto by bolo nepravdivé tvrdenie *Portrét je v striebornej truhlici.* Podľa zadania však nemôžu byť dve nepravdivé tvrdenia na jednej truhlici, čiže portrét v olovenej truhlici byť nemôže.Vyskúšali sme tak všetky možnosti a jediná vyhovujúca bola, že portrét je v striebornej truhlici.

b) Znova rozoberme všetky možnosti:

- Ak by bol prsteň v zlatej truhlici, obe tvrdenia na nej - *Tu prsteň nie je* a *Prsteň je v striebornej truhlici* - by boli nepravdivé. Taktiež by boli obe tvrdenia na striebornej truhlici - *Prsteň nie je v zlatej truhlici* a *Prsteň je v olovenej truhlici* - nepravdivé, no takýto prípad podľa zadania nastať nemôže. Prsteň v zlatej truhlici teda nie je.
- Ak by bol prsteň v striebornej truhlici, tvrdenie *Prsteň nie je v zlatej truhlici* by bolo pravdivé a *Prsteň je v olovenej truhlici* nepravdivé. Na olovenej truhlici by však bolo tvrdenie *Prsteň tu nie je* pravdivé a *Prsteň je v zlatej truhlici* nepravdivé. Podľa zadania takýto prípad nemôže nastať, teda prsteň v striebornej truhlici nie je.
- Ak by bol prsteň v olovenej truhlici, tvrdenie *Tu prsteň nie je* na zlatej truhlici by bolo pravdivé, tvrdenie *Prsteň je v striebornej truhlici* nepravdivé, tvrdenia *Prsteň nie je v zlatej truhlici* a *Prsteň je v zlatej truhlici* na striebornej truhlici by boli obe pravdivé a na olovenej obe tvrdenia - *Prsteň tu nie je* a *Prsteň je v zlatej truhlici* – by boli nepravdivé. Vyskúšali sme všetky možnosti a ako jediná vyhovovala tretia – prsteň je v olovenej truhlici.

Iné riešenie: Rozborom tvrdení:

a) Prvé tvrdenia na zlatej a striebornej truhlici znamenajú to isté – obe hovoria o tom, že portrét nie je v zlatej truhlici - čo znamená, že sú buď naraz obe nepravdivé alebo obe pravdivé (vravíme , že majú rovnakú pravdivostnú hodnotu). Tvrdenia *Portrét bol namaľovaný v Benátkach* a *Portrét bol namaľovaný vo Flo-*

rencii si navzájom odporujú, čo znamená, že aspoň jedno z týchto dvoch tvrdení je nepravdivé. Ak by tak boli prvé tvrdenia nepravdivé, aspoň na jednej truhlici by boli dve nepravdivé tvrdenia, čo je v rozpore so zadaním, a tak musia byť pravdivé. Vieme teda, že portrét nie je v zlatej truhlici.

Na olovenej truhlici je napísane *Tu portrét nie je.* Ak by bolo toto tvrdenie nepravdivé, znamenalo by, že tam portrét je, a tak by nemohla byť pravda, že *Portrét je v striebornej truhlici*, na truhlici by tak boli dve nepravdivé tvrdenia, a tak to byť nemôže. Tento výrok teda musí byť pravdivý a portrét nie je v olovenej truhlici. Ostala nám už len jedna možnosť – portrét je v striebornej truhlici. Jednoducho si môžeme overiť, že v takom prípade je na prvých dvoch truhliciach po aspoň jednom pravdivom tvrdení a na olovenej sú pravdivé obe, teda takáto možnosť zadaniu vyhovuje.

b) Už sme si povedali, že prvé tvrdenia na zlatej a striebornej truhlici znamenajú to isté – prsteň nie je v zlatej truhlici . Druhé tvrdenie na olovenej truhlici – *Prsteň je v zlatej truhlici* – znamená presný opak týchto dvoch, má tak opačnú pravdivostnú hodnotu. Tvrdenie na olovenej truhlici – *Prsteň tu nie je* – je v rozpore s tvrdením na striebornej truhlici – *Prsteň je v olovenej truhlici*, majú tak opačnú pravdivostnú hodnotu. Vieme teda povedať, že na striebornej a olovenej truhlici sú dve dvojice tvrdení (po jednom tvrdení z každej truhlice), ktoré si navzájom odporujú a práve jedno z dvojice musí byť pravdivé a druhé nepravdivé.

Môžu tak nastať tri možnosti: na striebornej truhlici sú dve pravdivé tvrdenia a na olovenej dve nepravdivé, na olovenej truhlici sú dve pravdivé tvrdenia a na striebornej dve nepravdivé alebo na oboch je po jednom pravdivom a jednom nepravdivom tvrdení. Poslednú možnosť však vylučuje zadanie, keďže dve truhlice s jedným pravdivým a jedným nepravdivým tvrdením tam nemôžu byť. V oboch prípadoch to znamená, že jedno pravdivé a jedno nepravdivé tvrdenie je na zlatej truhlici. Treba však zistiť, ktoré je ktoré.

Ak by bol tvrdenie *Tu prsteň nie je* nepravdivé, tvrdenie *Prsteň je v striebornej truhlici* by muselo byť pravdivé. Lenže takto by si tieto dve tvrdenia odporovali, čo sa stať nemôže, a teda prvé tvrdenie na zlatej truhlici nepravdivé byť nemôže.

Ak by teda bolo pravdivé, musí byť tvrdenie *Prsteň je v striebornej truhlici* nepravdivé. Dokopy nám teda vylúčia možnosti, že prsteň je v zlatej alebo striebornej truhlici, ostáva tak olovená truhlica. To je podporené pravdivosťou tvrdenia *Prsteň je v olovenej truhlici* na striebornej truhlici, ktoré je pravdivé preto, pretože ako sme si ukázali o dva odseky vyššie, že ak je pravdivé tvrdenie *Prsteň nie je v zlatej truhlici*, potom musí byť pravdivé aj tvrdenie *Prsteň je v olovenej truhlici.* Prsteň je teda naozaj v olovenej truhlici.

Komentár: Dôjsť k správnemu riešeniu u väčšiny z vás nebol problém. Horšie to bolo s logickým zápisom. V tomto type úloh je fajn zapísať si informácie do tabuľky, a tak spraviť svoje riešenie prehľadné nielen pre seba, ale aj pre opravovateľov.

Úloha č. 4:

opravovali Tina Oravcová & Ján Dudič

Anna Kleinová

Zadanie: „Začali sme hrať hru. Na stôl sme položili 7 zápaliek. V každom ťahu sme mohli zobrať jednu, dve alebo tri zápalky. Najprv urobil svoj ťah jeden a potom druhý z nás, a tak sme sa striedali. Kto vzal zo stola poslednú zápalku, vyhral. Keďže dámy majú prednosť, začínala vždy žena.

a) Ak by si bol na jej mieste, koľko zápaliek by si vzal hneď v prvom ťahu, aby si vyhral? A prečo práve toľko?

b) Potom sme sa rozhodli hrať so 40 zápalkami. Koľko by si potiahol v prvom ťahu v tomto prípade? Nezabúdaj, že chceš vyhrať."

Riešenie: Každý hráč môže potiahnuť 1, 2 alebo 3 zápalky. Určite vyhráme vtedy, ak potiahneme tak, aby po našom ťahu zostali na stole už len 4 zápalky. V tom prípade vieme vždy doplniť protihráčov ťah tak, aby mu na ďalší už nič nezostalo. Ak protihráč potiahne 1 zápalku, my potiahneme 3, ak potiahne 2 zápalky, my potiahneme tiež 2 a ak potiahne 3 zápalky, my potiahneme 1, takže sa mu už nič nezvýši.

Nezabúdajme pritom, že sme prvý hráč a chceme vyhrať. No to chce aj hráč číslo 2, určite si teda vyberie preňho najvýhodnejší ťah a bude robiť všetko pre to, aby sa nám nepodarilo zvíťaziť. Samozrejme, v súlade s pravidlami hry.

Vieme teda, že ak máme 4 zápalky a nasleduje protihráč, vyhráme. Preto si všetky zápalky môžeme rozdeliť na kôpky po štyroch. Môže sa však stať, že sa nám nejaké zápalky zvýšia a posledná kôpka bude neúplná. Ich počet v nej bude buď 1, 2 alebo 3. Tento počet vie hráč potiahnuť v jednom ťahu, preto ak sme prvý hráč a máme neúplnú kôpku, potiahneme všetky zápalky z nej a zostanú teda už len kôpky so 4 zápalkami. Tieto budeme odstraňovať postupne, v každom kole jednu kôpku. Nasleduje 2. hráč: potiahne 1, 2 alebo 3 zápalky z kôpky a my potiahneme zvyšné zápalky z tej kôpky, z ktorej ťahal 2. hráč.

Takto to môžeme robiť dovtedy, kým nevyčerpáme všetky kôpky. Môže sa stať, že po rozdelení zápaliek nebudeme mať žiadnu neúplnú kôpku. Vtedy môžeme potiahnuť ľubovoľný počet zápaliek a aj tak prehráme, pretože protihráč náš ťah vždy vie doplniť tak, aby zobral všetky zápalky z kôpky, z ktorej sme ťahali my. Aj on hrá tak, aby vyhral, a teda hrá ako my v predchádzajúcom prípade. A v tom bude pokračovať dovtedy, kým sa neminie posledná kôpka. Pozrime sa teda na počiatočné počty zápaliek v našom zadaní.

a) Pri celkovom počte zápaliek 7 je to jednoduché. Rozdelíme si zápalky na 2 kôpky po 4 a 3 zápalky. Začíname, potiahneme teda 3 z neúplnej kôpky. Zostane nám už len jedna úplná kôpka. Nasleduje súper a zo zvyšných 4 zápaliek zoberie najviac 3, potom my zoberieme zvyšok, čo znamená, že sme vyhrali.

b) Pri 40 zápalkách postupujeme rovnakým spôsobom. Rozdelíme ich na 10 kôpok po 4 zápalky, čo značí, že nemáme ani jednu neúplnú kôpku. Keďže začíname prvý, náš súper vie vždy doplniť náš ťah tak, aby do ďalšieho kola zostalo o kôpku menej a nakoniec žiadna, z čoho vyplýva, že v tomto prípade sme prehrali.

Zopakujme si teraz, ako to funguje:

- Ak rozdelíme zápalky len na úplné kôpky, vtedy prehrá 1. hráč a vyhrá 2.hráč, pretože ho vie vždy doplniť.
- A ak rozdelíme zápalky na neúplnú a zvyšné úplné kôpky, vtedy prehrá 2. hráč, pretože prvý zoberie celú neúplnú kôpku, čím obráti poradie tak, že súper ťahá z úplnej kôpky ako prvý a prvý hráč ho doplní, čiže vezme poslednú zápalku a vyhrá.

Komentár: Úlohu **a)** vyriešila veľká väčšina z vás správne a so všetkým, čo sme od vás očakávali. Niekoľko málo z vás postrácalo body za to, že ste nám nepovedali, prečo je začať potiahnutím troch zápalok jediné správne riešenie. Horšie to už bolo s úlohou **b)**, kde mnohí z vás nedokázali využiť svoje správne myšlienky z úlohy **a)**. Niektorí z vás však nepochopili princíp takéhoto typu úloh. V prvom rade je potrebné si uvedomiť, že sa snažím vymyslieť postup, kde je úplne jedno, ako zareaguje súper, ja aj tak stále vyhrám. Takže keď sa vám v riešeniach vyskytne veta ako „Súper si určite potiahne 2 a ja vyhrám.“, tak je niečo zle, obzvlášť, keď si súper môže potiahnuť 3 a vyhrá on. Ďalej je nutné brať do úvahy dokonalého súpera, ktorý všetko vie, všade bol a všetko videl a, samozrejme, tiež pozná výhernú stratégiu. Len ak vaša stratégia funguje aj proti takémuto súperovi, je správna. Trochu nás mrzí, že nie jeden z vás mohol mať oveľa viac bodov, ak by „nehral“ so súperom, ktorý nechce vyhrať.

Úloha č. 5:

opravovali Anton Gromóczki & Lucia Magurová

Samuel Banas, František Gábor, Michal Masrna, Frederik Ténai

Zadanie: Potrebujeme pomoc. Sme traja bratia, máme vinicu a pred týždňom nám zomrel otec. Ostalo nám po ňom len 21 sudov na víno. Sedem z nich je plných, sedem poloprázdnych a sedem úplne prázdnych. V závete, ktorý nám nechal, je napísané, že každý z nás troch musí dostať presne rovnaký počet sudov a rovnaké množstvo vína. Čo máme robiť, aby sme splnili otcovu poslednú vôľu? Víno sa nesmie prelievať.

Riešenie: Najprv sa pozrime, aké dedičstvo vlastne otec svojim synom zanechal. Máme 7 plných, 7 poloprázdnych a 7 prázdnych sudov. V plných sudoch je spolu $7 \cdot 1 = 7$ sudov vína. V poloprázdnych sudoch je spolu $7 \cdot 0,5 = 3,5$ sudov vína. V prázdnych sudoch je spolu $7 \cdot 0 = 0$ sudov vína. Vo všetkých sudoch je $7 + 3,5 + 0 = 10,5$ sudov vína. Počet sudov je $7 + 7 + 7 = 21$ sudov. Našou úlohou bude rozdeliť tieto sudy tak, aby každý syn dostal rovnaké množstvo vína a rovnaký počet sudov. Každý syn musí dostať $10,5 : 3 = 3,5$ sudov vína v $21 : 3 = 7$ sudoch.

Skúsme nájsť všetky možnosti rozdelenia plných sudov tak, aby ani jeden z bratov nemal viac ako 3 plné (keďže každý brat dostane 3,5 sudov vína). Keďže žiaden z bratov nemôže mať viac ako tri plné sudy, ak neberieme do úvahy poradie bratov (lebo nám na ňom nezáleží), tak existujú dve možné rozdelenia plných sudov medzi bratov, a to:

a) Dvaja bratia dostanú tri plné sudy, jeden dostane jeden plný sud. Pre popis riešenia nech tri sudy dostanú prvý a druhý brat a jeden sud dostane tretí.

b) Dvaja bratia dostanú dva plné sudy, jeden dostane tri plné sudy. Pre popis riešenia nech tri sudy dostane prvý brat, dva sudy dostanú druhý a tretí brat.

	Prvý brat	3		Prvý brat	3
a)	Druhý brat	3	**b)**	Druhý brat	2
	Tretí brat	1		Tretí brat	2

Pozrieme sa možnosť po **a)**: Prvý brat má 3 plné sudy vína. Keďže má dostať 3,5 sudov vína, nezostáva nám nič iné, ako prideliť mu poloprázdny sud. Prvý brat má 3 plné a jeden poloprázdny sud. Teda množstvo vína, ktoré má dostať, sme už dosiahli, ale chýbajú mu ešte 3 sudy, a tak mu pridelíme 3 prázdne sudy, aby nedostal viac vína, než na aké má nárok. Prvý brat dostane 3 plné, 1 poloprázdny a 3 prázdne sudy.

Druhý brat je na tom rovnako ako prvý. Keďže má 3 plné sudy, jediný spôsob, ako dosiahnuť množstvo vína 3,5 sudov, je prideliť mu poloprázdny. V štyroch sudoch už má „svoj“ 3,5 sudov vína, teda prideliť mu už môžeme len prázdne sudy. Dostane 3 prázdne sudy, aby sa dodržal počet 7. Druhý brat dostane 3 plné, 1 poloprázdny a 3 prázdne sudy.

Prvý a druhý brat dostali spolu 14 sudov, v ktorých je 7 sudov vína. Tretiemu bratovi teda zostalo 7 sudov $(21 - 14)$,v ktorých je práve 3,5 sudov vína $(10,5 - 7 = 3,5)$. Teda pridelíme mu všetko, čo „zostalo“, a to 5 poloprázdnych a jeden prázdny sud. Keďže jeden plný sud už má (podľa tabuľky a)), naozaj má 7 sudov a v nich 3,5 suda vína. Tretí brat má 1 plný sud, 5 poloprázdnych a 1 prázdny.

Možnosť po **b)**: Prvý brat má 3 plné sudy. Má dostať 3,5 sudov vína, pridelíme mu poloprázdny sud. Množstvo vína, ktoré má prvý brat dostať, sme dosiahli, ale ešte nemá dostatok sudov. Dostane 3 prázdne sudy, aby mal 7 sudov. Prvý brat dostane 3 plné, 1 poloprázdny a 3 prázdne sudy.

Druhý brat má 2 plné sudy vína, preto, aby mal 3,5 sudov vína, pridelíme mu 3 poloprázdne (počet plných sudov meniť nemôžeme, keďže sme s ich v tabuľke už rozdelili). Dostane dva prázdne sudy, aby sme dodržali, že počet sudov pre každého je sedem.

Tretí brat má 2 plné sudy. Rovnako ako druhý, dostane 3 poloprázdne sudy, aby mal 3,5 sudov vína. Aby bol dodržaný počet 7 sudov pre každého brata, dostane zvyšné dva prázdne sudy.

Máme teda riešenia pre obidve rozdelenia plných sudov a teraz k nim ostáva priradiť bratov. V tabuľkách sú všetky (teda dve) riešenia úlohy. Viac ich nie je, lebo bratia sú (aspoň čo sa vína týka) úplne rovnakí.

a)

	plné sudy	poloprázdne sudy	prázdne sudy
Prvý brat	3	1	3
Druhý brat	3	1	3
Tretí brat	1	5	1

b)

	plné sudy	poloprázdne sudy	prázdne sudy
Prvý brat	3	1	3
Druhý brat	2	3	2
Tretí brat	3	2	3

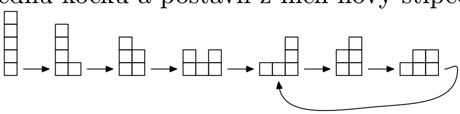
Komentár: Všetci ste prišli na to, ako by si bratia mali sudy rozdeliť, aj keď väčšina z vás našla len jedno riešenie, čo vôbec nebolo problémom. Veľmi sme však ocenili, ak ste našli obe riešenia. Keďže najdôležitejšie v tejto úlohe bolo prísť na to, koľko vína v koľkých sudoch by mal dostať jeden brat, body sa strhávali najmä vtedy, keď ste to nenapísali a tiež vtedy, ak ste dostatočne nepovedali, ako ste sa dopracovali k vhodnému rozdeleniu. Potešilo nás, že zlé riešenie nemal vôbec nikto.

Úloha č. 6:

opravovali Jakub Sedlák & Daniel Ondra

 Pavol Klein

Zadanie: Ukázal na kocky: „Už dve hodiny sa tu hrám s piatimi kockami. Postavil som si z nich ľubovoľnú vežu a zahral som si hru. Z každého stĺpca veže som zobral z vrchu jednu kocku a postavil z nich nový stĺpec.

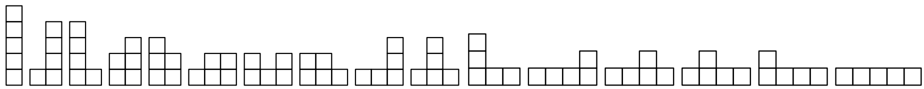


Aha, takto. Ak vznikli medzi stĺpcami medzery, spojil som stĺpce dokopy. No veže sa po istom čase začnú opakovať a mňa to prestane baviť. Akú prvú vežu si mám postaviť, aby som pri hraní tejto hry postavil čo najväčšie množstvo rôznych veží?“

Riešenie: Asi najjednoduchším spôsobom, ako takúto úlohu riešiť, je prejsť všetky možnosti. Takto väčšina z vás postupovala. Pri takomto riešení je ale veľmi dôležité byť si istý, najlepšie aj ukázať, že sme prešli naozaj všetky možnosti. Poďme teda nájsť všetky možné veže, ktoré sa z piatich kociek dajú postaviť. Budeme ich hľadať postupne, podľa toho, z koľkých stĺpcov sa skladajú. Pre prehľadnosť namiesto obrázkov veží použijeme postupnosť čísel, kde čísla budú znamenať počet kociek v za sebou idúcich stĺpcoch. Napríklad veže zo zadania budú postupne vyzerať takto: (5), (4,1), (3,2), (2,1,2), a tak ďalej.

- Veža, ktorá má len jeden stĺpec, je jediná: (5) (1 veža)
- Veže s dvoma stĺpcami majú stĺpce vysoké buď jednu a štyri, alebo dve a tri kocky. Takže môžu vyzerať takto: (1,4), (4,1), (2,3), (3,2) (4 veže)
- Veže s troma stĺpcami môžu mať buď dva stĺpce vysoké jednu kocku a jeden stĺpec vysoký tri kocky, alebo dva stĺpce vysoké dve kocky a jeden stĺpec vysoký jednu kocku. Veže prvého typu sú tri: (3,1,1), (1,3,1), (1,1,3); a veže druhého typu sú tiež tri: (1,2,2), (2,1,2), (2,2,1). V týchto vežiach si vlastne vyberáme jednu z troch možností, kam umiestniť stĺpec, ktorý má inú výšku ako zvyšné dva. (6 veží)
- Veže so štyrmi stĺpcami majú tri stĺpce vysoké jednu kocku a jeden stĺpec vysoký dve kocky. Pre každú vežu si vlastne vyberáme, ktorý z možných štyroch stĺpcov bude ten dvojkockový. Vyzerajú takto: (2,1,1,1), (1,2,1,1), (1,1,2,1), (1,1,1,2). (4 veže)
- Zostáva jediná veža, ktorá má stĺpcov päť: (1,1,1,1,1) (1 veža)

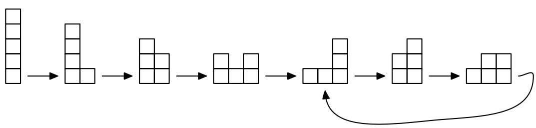
Z piatich kociek sa teda dá poskladať šestnásť rôznych veží a všetky sú na obrázku.



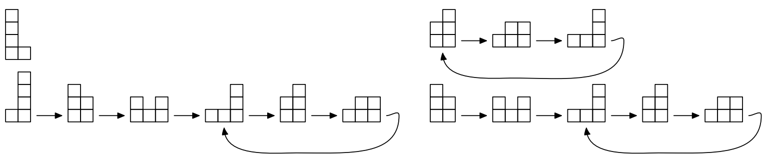
Prvý možný postup:

Ako sa bude hra vyvíjať podľa toho, ktorou vežou začneme, popisujú nasledujúce obrázky.

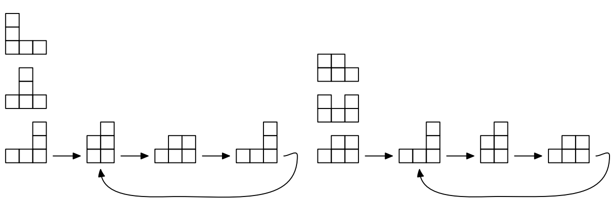
- Ak začneme s vežou, kde sú kocky v jednom stĺpci:



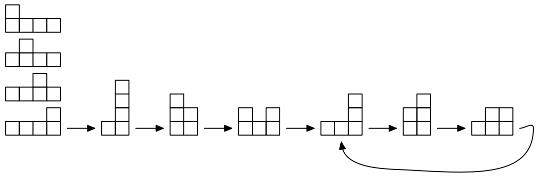
- Ak začneme s vežou, kde sú kocky v dvoch stĺpcoch:



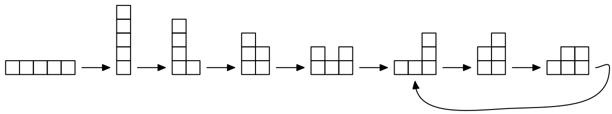
- Ak začneme s vežou, kde sú kocky v troch stĺpcoch:



- Ak začneme s vežou, kde sú kocky v štyroch stĺpcoch:



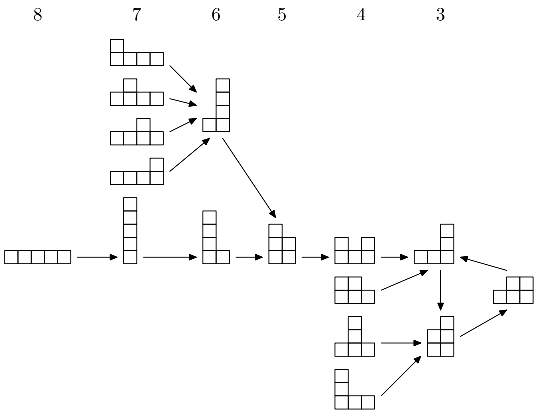
- Ak začneme s vežou, kde sú kocky v piatich stĺpcoch:



Z obrázkov vidíme, že viac ako osem rôznych tvarov sa v hre nikdy nepoužije. Veža, ktorá umožní prejsť osem tvarov, je jediná, a to (1,1,1,1,1).

Druhý možný postup:

Z piatich kociek sa teda dá poskladať šestnásť rôznych veží. Ako sa bude hra vyvíjať podľa toho, ktorou vežou začneme, popisuje nasledujúci obrázok.



Tento obrázok je určite správny a úplný, lebo od každej veže ide šípka do jednej inej (dá sa prestavať na práve jednu vežu podľa pravidla). Takže každý obrázok, ktorý popisuje všetky zmeny veží, sa od tohto líši len usporiadaním veží. Sú v ňom všetky informácie o tom, ako bude hra kedy vyzerať. Nad jednotlivými stĺpcami, v ktorých sú veže, sú čísla, ktoré znamenajú počet rôznych tvarov, ktoré sa v hre použijú, keď začneme s vežou v danom stĺpci.

Z obrázku vidíme, že viac ako osem rôznych tvarov sa v hre nikdy nepoužije. Veža, ktorá umožní prejsť osem tvarov, je jediná, a to (1,1,1,1,1).

Komentár: Mnohým z vás sa stalo, že ste nepochopili prestavovanie veží správne. Vo vzorovom riešení je to snáď dostatočne vysvetlené. Najčastejšou chybou, resp. nedostatkom riešení, bolo, že aj keď ste našli a naspísali (nakreslili) všetky rôzne veže, neurobili ste to so žiadnym komentárom a teda ste neukázali, že ste našli naozaj všetky. Ako je aj vo vzorovom riešení napísané, ak si vyberiete metódu riešenia: prejdenie všetkých možností, musíte ukázať, že ste prešli naozaj všetky.

Tento spôsob riešenia je vhodný pre množstvo úloh. Napríklad aj pre riešenie úlohy s vlkom, kozou, kapustou a prevozníkom. Ak raz nájdeme všetky možné stavy, môžeme použiť, práve takým spôsobom, ako v druhom vzorovom riešení, graf. V grafe si vyznačíme, z ktorých stavov prechádzame do ktorých. Z takéhoto grafu sa dá potom veľa užitočného vyčítať. V tomto prípade to bola hľadaná najdlhšia cesta.

Poradie riešiteľov po 2. sérii

Poradie	*Meno*	*Trieda*	*Škola*	*Poč.*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Pr.*	*Súčet*
1.	Pavol Klein	Prima	GSNP PN	53	8	9	9	9	9	9	0	106
2. – 3.	Michal Masrna	5. B	ZKro4KE	51	9	9	9	9	9	8	9	105
	Anna Kleinová	3. A	ZŠtefPN	53	8	9	9	9	7	8	9	105
4. – 5.	Samuel Krajči	Prima	GAlejKE	50	8	9	7	9	9	8	0	100
	Lenka Kopfová	6. A	ZHradCZ	51	9	9	8	9	6	8	0	100
6.	Michal Horanský	5. C	ZTeplBA	54	8	9	9	3	6	7	6	99
7. – 8.	Martin Melicher	6. A	ZKro4KE	49	7	9	5	9	9	8	0	96
	Matej Hanus	5. A	ZKro4KE	47	9	9	9	7	7	8	7	96
9.	Samuel Banas	4. C	ZBrezPN	46	7	9	6	9	9	-	9	95
10.	František Gábor	5. A	ZKro4KE	43	7	9	9	9	9	7	7	93
11.	Frederik Ténai	4. S	ZAngeKE	38	9	9	9	9	9	-	9	92
12.	Peter Zimovčák	5. B	ZKro4KE	40	7	9	9	9	9	1	7	90
13.	Petronela Kočiščáková	6. B	ZPoliKE	45	8	8	8	9	7	4	0	89
14.	Róbert Sabovčík	5. A	ZKro4KE	41	9	9	6	9	8	6	6	88
15. – 17.	Martin Mičko	Prima	GAlejKE	41	8	5	9	9	6	4	0	82
	Dárius Pacholský	5. A	ZKro4KE	37	7	6	9	9	8	-	6	82
	Radovan Lascsák	5. B	ZKro4KE	28	9	9	9	9	9	1	9	82
18.	Jakub Patrik	5. A	ZKro4KE	44	6	8	5	4	6	1	4	77
19.	Silvia Berecká	5. A	ZKro4KE	46	7	6	3	4	5	4	4	76
20. – 21.	Matej Tarča	5. B	ZKro4KE	35	9	6	7	4	9	-	4	74
	Martin Šalagovič	Prima	GAlejKE	44	1	3	8	6	9	3	0	74
22. – 23.	Jonáš Suvák	6. C	ZŠmerPO	39	7	5	8	3	6	3	0	71
	Barbora Martonová	6. A	ZŠmerPO	38	7	6	6	4	9	1	0	71
24. – 25.	Zuzana Ondrejová	6. A	ZŠmerPO	32	7	6	9	4	8	1	0	67
	Jana Holečková	5. A	ZTomaMT	31	7	9	6	4	6	3	4	67
26.	Radomír Miščík	6. A	ZKro4KE	34	7	8	3	2	9	3	0	66
27.	Michal Kavuľa	5. B	ZKro4KE	40	8	-	9	-	6	1	-	64
28.	Tomáš Chovančák	5. B	ZKro4KE	34	9	6	1	4	8	1	1	63
29.	Patrik Leinstein	6. A	ZStarKE	34	7	5	5	-	7	4	0	62
30.	Margaréta Sokolová	6. A	ZŠmerPO	29	7	6	4	4	9	1	0	60
31. – 32.	Dávid Štulajter	5. B	ZKro4KE	27	-	9	3	4	7	5	3	58
	Samuel Chaba	Prima	GAlejKE	29	9	6	3	4	6	1	0	58
33.	Dominik Červený	5. B	ZKro4KE	28	9	6	3	-	9	1	1	57
34. – 35.	Andrea Faguľová	5. A	ZŠkolMG	29	7	7	6	-	7	-	-	56
	Matúš Ferenčuha	6. A	ZKro4KE	31	7	5	3	3	6	1	0	56
36.	Maroš Kyjovský	5. A	ZKomeSV	42	4	3	-	-	-	4	-	53
37.	Marek Lukáč	6. A	ZKro4KE	21	7	1	9	4	6	3	0	51
38. – 39.	Mária Koyšová	5. A	ZTomaMT	18	5	6	9	3	6	-	3	50
	Martin Kuľka	5.	ZSDrienov	22	7	6	5	2	4	3	3	50
40.	Veronika Belániová	4.	ZJeleNH	18	7	6	1	4	6	-	7	49
41.	Patrik Paľovčík	5. A	ZKro4KE	18	5	6	6	4	4	-	4	47

Poradie	Meno	Trieda	Škola	Poč.	1	2	3	4	5	6	Pr.	Súčet
42. – 43.	Jakub Kučerák	6. A	ZKro4KE	27	6	5	-	-	7	-	0	45
	Soňa Liptáková	5. B	ZKro4KE	14	9	6	3	4	6	-	3	45
44.	Martina Chabadová	4. B	ZABerMT	19	8	6	-	-	-	-	8	41
45.	Tomáš Mihalik	4. A	ZKro4KE	16	7	1	3	0	4	2	7	40
46.	Karin Šteňová	6. A	ZKomeSV	38	-	-	-	-	-	-	0	38
47. – 48.	Benjamín Mravec	5. B	ZKro4KE	15	6	2	5	0	4	3	2	37
	Miloš Mičík	6. A	ZFraňZC	22	9	0	1	1	4	0	0	37
49. – 50.	Dávid Stripaj	6. A	ZKro4KE	25	8	3	-	-	-	-	0	36
	Magdaléna Heveriová	6. B	ZStanKE	23	5	-	4	4	-	-	0	36
51.	Alexandra Ovsianková	4. B	ZABerMT	10	5	6	6	-	-	-	6	33
52. – 54.	Martin Albert Gbúr	5. A	ZKro4KE	0	7	6	3	8	5	-	0	29
	Tereza Straková	5. C	ZBajkPO	0	8	-	4	4	7	3	3	29
	Benjamín Gejguš	1. V	GŠtúrMI	29	-	-	-	-	-	-	0	29
55. – 56.	Tatiana Lacková	6.	ZŽdaňa	8	6	6	2	1	4	-	0	27
	Martin Berka	5. B	ZKro4KE	27	-	-	-	-	-	-	-	27
57.	Laura Antolová	4.	ZJeleNH	21	-	-	-	-	-	-	-	21
58.	Matej Bačo	5. B	ZKro4KE	19	-	-	-	-	-	-	-	19
59.	Šimon Juhás	4. A	ZKro4KE	0	-	-	9	-	-	-	9	18
60.	Jakub Šimo	6. B	ZZdenSN	9	3	3	1	-	-	0	0	16
61. – 62.	Marek Dorák	5. A	ZStanKE	15	-	-	-	-	-	-	-	15
	Lívia Knapčoková	Prima	GAlejKE	15	-	-	-	-	-	-	0	15
63.	Ivan Čabra	5. A	ZStanKE	14	-	-	-	-	-	-	-	14
64.	Terézia Širilová	6. A	ZZdenSN	8	1	0	1	-	-	0	0	10
65.	Gabriela Želonková	6.	ZSpisTE	0	2	2	2	0	3	0	0	9
66.	Michaela Dinhová	6.	ZSpisTE	0	2	2	1	0	3	0	0	8
67.	Denis Kleja	6. B	ZZdenSN	4	-	-	-	-	-	-	0	4
68. – 69.	Viktória Kováčová	6. B	ZŽdaňa	3	-	-	-	-	-	-	0	3
	Igor Kuruc	4.	ZJeleNH	3	-	-	-	-	-	-	-	3
70.	Lenka Eliašová	6. A	ZZdenSN	0	-	-	-	-	-	-	0	0

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Gymnázium Poštová 9, Košice
- Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta Univerzity P. J. Šafárika, Košice
- Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice

Názov: MALYNÁR — korešpondenčný matematický seminár
Číslo 3 • december • Zimná časť 21. ročníka (2011/2012)
Internet: `http://malynar.strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1
Internet: `http://zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`

AGENTÚRA NA PODPORU VÝSKUMU A VÝVOJA

Aktivita je podporená z grantu APVV LPP–0057–09
Rozvíjanie talentu prostredníctvom korešpondenčných seminárov a súťaží